

## Groupement B 2006

### Exercice 1

(11 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

#### A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

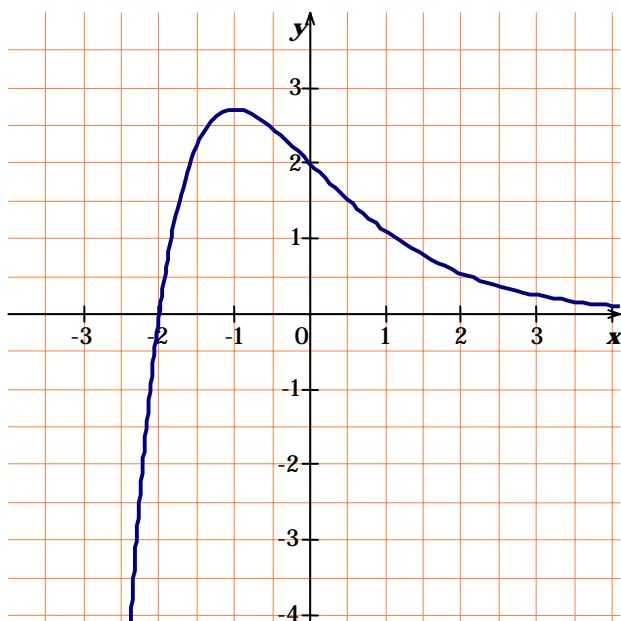
$$(E) : y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x}$$

où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et deux fois dérivable sur  $\mathbf{R}$ ,  $y'$  la fonction dérivée de  $y$  et  $y''$  sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle (Eo) :  $y'' - 3y' - 4y = 0$ .
2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $h(x) = xe^{-x}$ .  
Démontrer que  $h$  est une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution,  $f$ , de (E) qui vérifie les conditions initiales  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = -1$ .

#### B. Étude locale d'une fonction

La courbe  $C$  ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = (x+2)e^{-x}$ .



1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de  $f$  est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

2. Déduire du 1 une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  au point d'abscisse 0.

3. Étudier la position relative de  $C$  et  $T$  au voisinage du point d'abscisse 0.

#### C. Calcul intégral

On note  $I = \int_0^{0,6} f(x) dx$

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que  $I = 3 - 3,6e^{-0,6}$ .
2. Donner la valeur approchée arrondie à  $10^{-3}$  de  $I$ .
3. Donner une interprétation graphique du nombre  $I$ .

## Exercice 2

(9 points)

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types :

- des chaudières dites « à cheminée »,
- des chaudières dites « à ventouse ».

**Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

### A. Ajustement affine

Le nombre de chaudières fabriquées lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

| Rang de l'année : $x_i$                              | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Nombre de chaudières fabriquées par milliers : $y_i$ | 15,35 | 15,81 | 16,44 | 16,75 | 17,19 | 17,30 |

- À l'aide d'une calculatrice, déterminer :
  - le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double de variables  $x$  et  $y$  ; arrondir à  $10^{-2}$  ;
  - déterminer une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$ , sous la forme  $y = ax + b$ , où  $a$  sera arrondi à  $10^{-3}$  et  $b$  sera arrondi à l'unité.
- En supposant que la tendance observée se poursuive pendant deux années, estimer le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

### B. Probabilités conditionnelles

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse. Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminée sont défectueuses et 5% des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard une chaudière dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

- A : « La chaudière est à cheminée » ;  
B : « La chaudière est à ventouse » ;  
D : « La chaudière présente un défaut » .

1° Déterminer  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(D/A)$  et  $P(D/B)$ .

2° Calculer  $P(D \cap A)$  et  $P(D \cap B)$ .

3. En remarquant que  $D = (D \cap A) \cup (D \cap B)$  et que les événements  $D \cap A$  et  $D \cap B$  sont incompatibles, calculer  $P(D)$  et  $P(\bar{D})$ .

### C. Loi normale

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque chaudière à cheminée prélevée au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement en années.

On admet que  $X$  suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type 3.

Une chaudière est dite « amortie » si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à 10 ans.

Calculer la probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit « amortie » ; arrondir à  $10^{-3}$ .

### D. Intervalle de confiance

On considère un échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard dans un stock important. Ce stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 94 chaudières sont sans aucun défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue  $p$  des chaudières de ce stock qui sont sans aucun défaut.

2. Soit  $F$  la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 chaudières prélevées au hasard et avec remise dans ce stock, associe la fréquence des chaudières de cet échantillon qui sont sans aucun défaut.

On suppose que  $F$  suit la loi normale de moyenne  $p$  et d'écart type  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$ , où  $p$  est la fréquence inconnue des chaudières du stock qui sont sans aucun défaut.

Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence  $p$  avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes à  $10^{-2}$ .

3. On considère l'affirmation suivante : « la fréquence  $p$  est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2 ».

Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)