LES SECRETS MATHÉMATIQUES DU BALLON DE FOOT

Albrecht Beutelspacher, **Allemagne**

On imagine habituellement le ballon de foot parfaitement rond mais, quand on y regarde de plus près, on s'aperçoit qu'il est formé de plusieurs morceaux, selon un arrangement qui vise à rendre le ballon aussi rond que possible. Les morceaux du ballon sont des polygones réguliers, pas tous les mêmes. Avec des morceaux tous identiques on ne peut fabriquer que des solides platoniciens (figure 1) qui ne sont pas bien ronds: vous imaginez-vous jouer au foot avec un ballon en forme de cube ?

figure 1

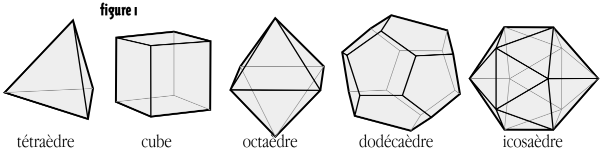
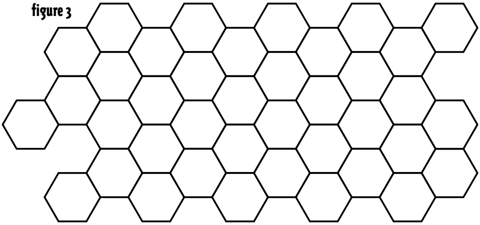


figure 2

Le ballon standard est formé d'hexagones et de pentagones réguliers. À chaque sommet trois morceaux se rejoignent (figure 2). Si on ne prenait que des hexagones, on obtiendrait une figure plate comme un réseau de nids d'abeilles (figure 3) ; un seul hexagone et deux pentagones à chaque sommet, cela donnerait un sommet trop marqué (trop pointu).

figure 3



On prend donc deux hexagones et un pentagone pour rendre la structure la plus sphérique possible. Si on fait la même combinaison à tous les sommets on obtient une structure homogène. En particulier on voit que deux pentagones ne se touchent jamais. Demandons-nous

Albrecht Beutelspacher (Albrecht.Beutelspacher@math.uni-giessen.de)
Parmi ses nombreuses activités tournées vers la popularisation des mathématiques, il prépare actuellement un musée des mathématiques.

combien il y a de pentagones et d'hexagones au total. Bien sûr, nous pourrions les compter. Mais on peut se tromper et compter deux fois le même morceau. Il y a des moyens ingénieux pour compter...

Par exemple si on tient le ballon avec un pentagone au sommet ; il y en a alors un autre en bas et les autres pentagones forment deux ceintures de 5 pentagones chacun (comptez-les !). Au total cela fait $1+1+5+5=12$ pentagones. Et combien d'hexagones ? Pour les compter utilisons le nombre de pentagones: chaque pentagone a 5 voisins hexagonaux. Mais chaque hexagone a exactement 3 pentagones pour voisins (Regardez !), donc chaque hexagone est compté trois fois. Au total on obtient pour le nombre d'hexagones $12 \times 5 / 3 = 20$.

Vous imaginez la difficulté pour assembler un modèle en papier formé de 12 pentagones et de 20 hexagones. Voici un kit d'assemblage pratique.

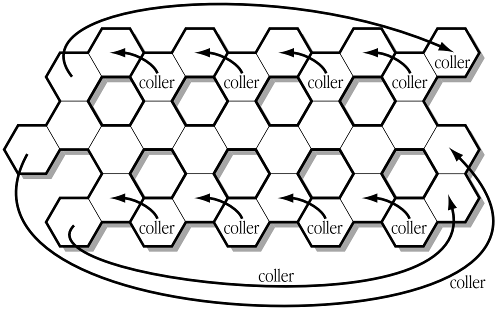


figure 4. On ne voit que des hexagones. Il faut couper le long des traits gras seulement, certains hexagones intérieurs deviennent des trous. L'étape finale consiste à transformer chaque trou hexagonal en un trou pentagonal en collant ensemble deux hexagones. Essayez, c'est facile et gratifiant ! Vous obtenez une balle de foot avec des hexagones solides et des pentagones formant des trous (qui ne se touchent pas).

Il y a 12 pentagones et chacun a 5 sommets donc 60 sommets au total. D'ailleurs il y a une relation magique entre les nombres que nous obtenons. Le nombre de morceaux (de faces, c'est le terme employé) est de $12+20=32$. Le nombre de sommets est 60.

Maintenant pensez au nombre de côtés, c'est-a-dire de segments qui sont à la frontière de deux faces. Il y en a beaucoup, leur nombre paraît compliqué à calculer sans faire d'erreurs... mais il y a un truc ! Une formule relie ces nombres : c'est la formule d'Euler, du nom d'un très grand mathématicien suisse, Leonhard Euler (1707-1783).

Notons S le nombre de sommets, A d'arêtes, F de faces. On a :

$$S - A + F = 2.$$

La formule est valable pour tous les solides fabriqués comme le ballon de foot avec des faces qui se rencontrent suivant des arêtes ; une seule restriction : le solide doit être convexe, c'est-à-dire ne contenir ni partie rentrante ni trou. Si on applique cette formule pour le ballon de foot on trouve :

$$A = 60 + 32 - 2 = 90.$$

C'est plus simple que de les compter un par un !

En chimie on a fabriqué une molécule extraordinaire composée de 60 atomes de carbone. En langage chimique elle s'appelle C_{60}. Quand on a commencé, on avait du mal à se représenter la disposition la meilleure des atomes. Finalement en 1985 Harold Kroto (Université du Sussex) et Rick Smalley (Rice University) ont découvert que les 60 atomes devaient être aux sommets d'une microballe de foot et qu'alors les forces entre les atomes de carbone s'équilibraient parfaitement. Ils ont appelé ces molécules des fullérènes parce qu'elles ressemblent aux dômes construits par le célèbre architecte américain Buckminster Fuller. Ce sont les mêmes équations mathématiques qui expliquent la stabilité de ces dômes, celle des molécules de fullerènes (les forces entre les atomes s'équilibrent mutuellement) et qui font que le ballon de foot est presque rond : les morceaux s'équilibrent. Les inventeurs de cette molécule ont reçu en 1996 le Prix Nobel de chimie.