LES BULLES DE SAVON, UN JEU D'ENFANT ?

Michele Emmer, **Italie**

Non, ce n'est pas *qu'un* jeu d'enfant !

Qui n'a pas joué avec des bulles de savon ? Ce sont aussi des objets très sérieux : « *Amusons-nous sur la terre et sur l'onde / malheureux qui se fait un nom / Richesses,honneurs, faux éclat de ce monde / Tout n'est que bulles de savon* », dit un poète inconnu, mais ces bulles sont un exemple de la matière molle qui intéresse les chimistes, les physiciens comme Pierre-Gilles de Gennes, et les mathématiciens. On attribue à Archimède (au deuxième siècle avant J.-C.) la remarque que, parmi les solides à surface donnée, c'est la sphère qui a le plus grand

Michele Emmer (emmer@mat.uniroma1.it)
Université de Rome La Sapienza, il a réalisé de nombreux films sur les relations entre l'art et les mathématiques.

volume, c'est-à-dire qui est solution du problème isopérimétrique (voir Le conte de fées mathématique, page 11). Autrement dit, à volume constant, on obtient la surface minimale pour la sphère. Ce n'est qu'en 1884 qu'on a donné une démonstration mathématique rigoureuse de ce fait. Le résultat analogue en dimension quelconque sera établi en 1958 par le mathématicien italien Ennio De Giorgi.

Les premières observations systématiques de bulles de savon sont dues au mathématicien belge Plateau (il a publié le résultat de 50 ans de recherche sous le titre «Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires »). Il étudie les films de savon qui s'appuient sur un contour donné, un fil de fer. Parmi toutes les surfaces imaginables s'appuyant sur le contour, le film de savon a la surface la plus petite. De plus une caractéristique locale, la courbe moyenne, est nulle (figure 1).

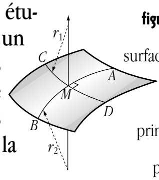
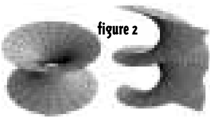


figure 1. La courbure moyenne de la surface est définie par l'intermédiaire de deux rayons appelés rayons principaux, qui sont dans des plans perpendiculaires.

La première surface connue connue, à part l'hélicoïde (formée par une droite en rotation et translation autour d'un axe perpendiculaire), est formée par la rotation d'une chaînette (voir page 15) autour d'un axe. La surface s'appelle caténoïde et a été déterminée en 1744 par l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps, Euler. Vous pouvez la fabriquer en formant des bulles de savon s'appuyant sur deux cercles.

figure 2


caténoïde hélicoïde

Mais il y a bien d'autres surfaces minimales. Plateau a observé expérimentalement que, si on a plusieurs surfaces qui se rencontrent, les angles que font entre elles les surfaces des bulles ont deux valeurs précises : 120° (comme deux demi-sphères, figure 3) ou 109°28 (quand quatre lignes de raccordement se rencontrent). C'est seulement en 1976 que la mathématicienne américaine Jean Taylor a expliqué ce résultat expérimental. Plateau observa aussi deux bulles de savon de volumes égaux ou différents qui se rencontrent. Les équations à résoudre sont compliquées (non-linéaires) et on a utilisé de manière décisive les ordinateurs. Les mêmes ordinateurs ont servi à fabriquer des images de surfaces minimales d'une grande qualité.

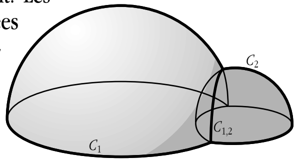


figure 3. Les films ne peuvent se rencontrer le long d'une ligne que par trois et forment alors deux à deux des angles de 120°.

Dans la période récente on a obtenu un riche «bestiaire de surfaces minimales», avec des images qui ont permis de faire des recherches très poussées. Par exemple on s'est intéressé aux surfaces minimales dont la «courbure totale» est bornée, même si la surface « va à l'infini ».On pensait que les seules surfaces existantes de ce type étaient le plan et la caténoïde. Les travaux de mathématiciens aidés de visualisations informatiques ont montré le contraire. Voilà un nouveau type de recherche pour géomètres informaticiens : dessiner à partir de données mathématiques des images utiles.

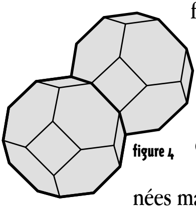


figure 4

Mais d'autres problèmes apparaissent naturellement, par exemple ceux soumis aux mathématiciens par les physiciens des matières molles comme les mousses : comment remplir l'espace avec des cellules (des bulles) de manière que la surface de contact ait une aire minimum ?

Si on ne considère qu'une seule cellule, nous avons vu que c'est la sphère qui est la solution. Mais s'il faut remplir l'espace, on imagine des dômes à la Buckminster Fuller (voir page 6). Cette question fut posée en 1887 par un physicien, Lord Kelvin (oui, celui des degrés, un écossais né en Irlande). Récemment la solution de Kelvin (figure 4) a été améliorée grâce à une subtile utilisation d'informatique graphique. Encore un nouvel exemple de recherches interdisciplinaires où les mathématiques ont leur part…

Vous voyez, ce n'est pas qu'un jeu d'enfant !