I - Problèmes introductifs

PRODUIT À SOMME CONSTANTE

Objectif	*Étudier les variations d'une fonction numérique par transposition dans un cadre géométrique.*
Outils	*Premières définitions relatives aux fonctions numériques : monotonie sur un intervalle, extremum.*

On se propose d'étudier comment varie le produit de deux nombres réels positifs dont la somme est constante.

A. Investigation numérique

Voici les dimensions de plusieurs rectangles dont le demi périmètre est égal à 12 :

mesure du premier côté	1	2,5	4	5,2	6	8	9	10,7
mesure du deuxième côté	11	9,5	8	6,8	6	4	3	1,3
aire du rectangle								

Compléter ce tableau.

Quelles propriétés relatives aux aires de ces rectangles peut-on observer ?

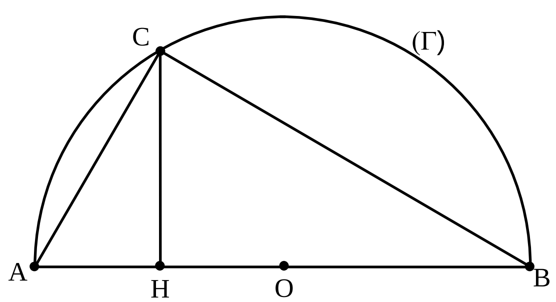
NOTE
On trouvera en annexe un mode de génération de tels rectangles qui met en évidence l'existence d'un rectangle d'aire maximale.

B. Étude générale

Soit deux nombres réels positifs a et b dont la somme $a+b$ est égale au nombre réel strictement positif donné s.

En fonction de a, le produit ab s'écrit donc $a\,(s-a)$.

Le problème consiste à étudier les variations de la fonction p définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,s\,]$ par $p\,(a) = a\,(s-a)$.



1. *Modélisation géométrique*.

Soit un demi-cercle (Γ) de centre O et de diamètre [AB] tel que $\mathrm{AB} = s$.

Soit H le point du segment [AB] tel que $\mathrm{AH} = a$ et $\mathrm{HB} = b$.

Soit C le point d'intersection de (Γ) et de la perpendiculaire en H à la droite (AB).

a. Démontrer que $\mathrm{CH}^2 = \mathrm{AH} \times \mathrm{HB}$.

> INDICATION
> Les angles $\widehat{\mathrm{ACH}}$ et $\widehat{\mathrm{CBH}}$ ont la même mesure.

b. En déduire la traduction de p en termes géométriques : $p : \mathrm{AH} \mapsto \mathrm{CH}^2$

2. *Existence d'un maximum*.

a. Observer que CH^2 admet une valeur maximale pour une position de H que l'on précisera.

b. En déduire que la fonction p admet un maximum pour une valeur de a que l'on précisera.

3. *Variation du produit*.

a. Examiner les variations de CH^2 lorsque H décrit le segment $[\mathrm{AB}]$, de A vers B.

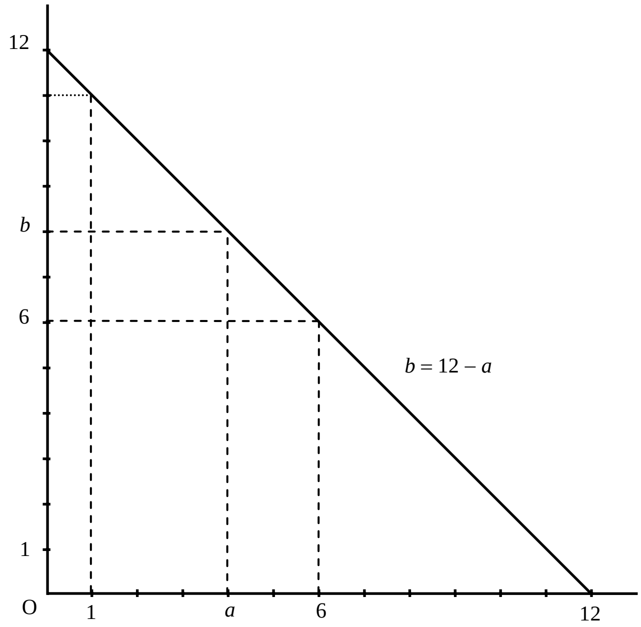
b. Dresser le tableau des variations de la fonction p sur l'intervalle $[0 ; s]$.

> NOTE
> On trouvera en annexe une étude algébrique des variations de p.

Addenda

A. Représentation des rectangles dont le demi périmètre est 12.

Comparer, à l'aide de ce graphique, l'aire d'un tel rectangle à l'aire du carré de côté 6.



B. Variation du produit

On reprend les notations de la partie B du problème.

1. Vérifier que $\mathrm{CH}^2 = \mathrm{OC}^2 - \mathrm{OH}^2$.

   H décrivant le segment $[\mathrm{AB}]$ de A vers B, examiner les variations de OH, puis les variations correspondantes de CH^2.

2. Démontrer que : $p(a) = \left(\dfrac{s}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{s}{2} - a\right)^2$.

   En utilisant cette expression de $p(a)$:

   – démontrer que la fonction p admet un maximum pour une valeur de a que l'on précisera ;

   – démontrer que p est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{s}{2}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{s}{2} ; s\right]$.

SOMME À PRODUIT CONSTANT

Objectif	*Étudier les variations d'une fonction numérique par transposition dans un cadre géométrique.*
Outils	*Premières définitions relatives aux fonctions numériques : monotonie sur un intervalle, extremum.*

On se propose d'étudier comment varie la somme de deux nombres réels positifs dont le produit est constant.

Soit deux nombres réels positifs a et b dont le produit ab est égal au nombre réel strictement positif p.

En fonction de a, la somme $a + b$ s'écrit donc $a+\dfrac{p}{a}$.

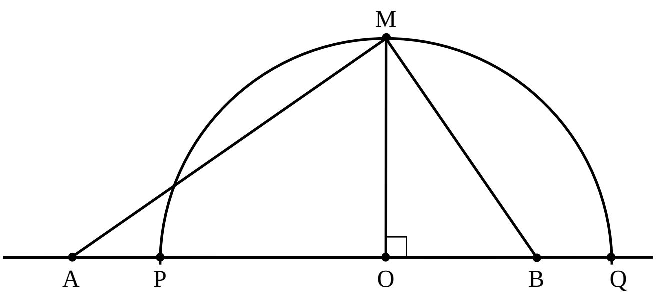
Le problème consiste à étudier les variations de la fonction s définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $s(a)=a+\dfrac{p}{a}$.

A. Modélisation géométrique

Soit un demi-cercle (Γ) de centre O et de diamètre $[\mathrm{PQ}]$ tel que $\mathrm{PQ}=2\sqrt{p}$.

Soit M le point d'intersection de (Γ) et de la perpendiculaire en O à la droite (PQ).

On note A le point de la demi-droite $[\mathrm{OP})$ tel que $\mathrm{OA}=a$, et B le point de la demi-droite $[\mathrm{OQ})$ tel que $\mathrm{OB}=b$. Par suite $\mathrm{AB}=a+b$.



1. Vérifier que: $\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\mathrm{OM}^2$.

   Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.

   En déduire une construction géométrique du point B, le point A étant choisi sur la demi-droite $[\mathrm{OP})$.

D'où la traduction de s en termes géométriques : $s : \mathrm{OA} \mapsto \mathrm{AB}$.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction s. (On prendra pour unité graphique le centimètre et 9 pour valeur de p).

   Montrer comment la construction géométrique décrite dans la question précédente permet de tracer point par point la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide d'un compas. Tracer une dizaine de points de cette courbe.

B. Existence d'un minimum

1. Soit Ω le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$. Démontrer que $\Omega\mathrm{M} \geq \mathrm{OM}$.

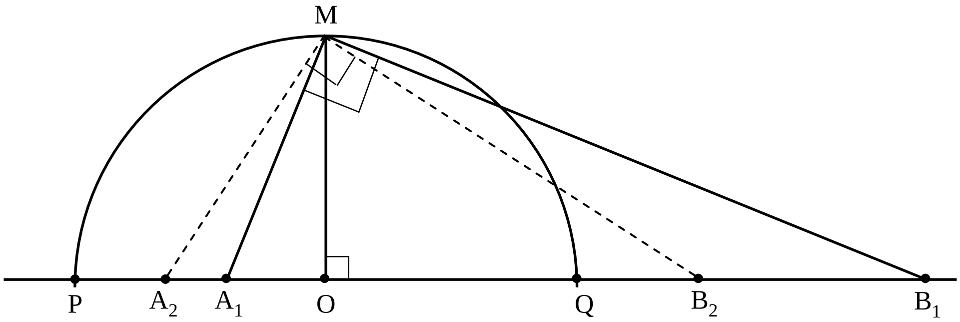
   En déduire que la distance AB admet pour valeur minimale $2\sqrt{p}$ et préciser les positions correspondantes des points A et B.

2. En déduire que la fonction s admet un minimum pour une valeur a que l'on précisera.

C. Variation de la somme

1. On considère deux nombres réels a_1 et a_2 vérifiant: $0 < a_1 < a_2 \leq \sqrt{p}$ et les couples de points $(\mathrm{A}_1 ; \mathrm{B}_1)$ et $(\mathrm{A}_2 ; \mathrm{B}_2)$ qui leurs sont associés.

   Il s'agit de comparer $s(a_1)$ et $s(a_2)$, soit $\mathrm{A_1B_1}$ et $\mathrm{A_2B_2}$.



   a. Démontrer que $\mathrm{A_1B_1} - \mathrm{A_2B_2} = \mathrm{B_1B_2} - \mathrm{A_1A_2}$.

   b. Démontrer que $\mathrm{OA_1} \leq \mathrm{OB_1}$ et $\mathrm{OA_2} \leq \mathrm{OB_2}$. En déduire que $\mathrm{MA_1} \leq \mathrm{MB_1}$ et $\mathrm{MA_2} \leq \mathrm{MB_2}$.

   c. Démontrer que l'aire du triangle $\mathrm{MA_1A_2}$ est inférieure à l'aire du triangle $\mathrm{MB_1B_2}$.

   Indication : utiliser un quart de tour de centre M.

   En déduire que $\mathrm{A_1A_2} \leq \mathrm{B_1B_2}$, puis que $\mathrm{A_1B_1} \geq \mathrm{A_2B_2}$.

   d. En déduire les variations de la distance AB lorsque A décrit le segment $[\mathrm{OP}]$ de O (non compris) vers P.

2. Reprendre cette comparaison pour deux nombres réels a_1 et a_2 vérifiant $\sqrt{p} \leq a_1 < a_2$.

3. Dresser le tableau des variations de la fonction s sur l'intervalle $]\,0 ; +\infty\,[$.

PRODUIT À SOMME DE CARRÉS CONSTANTE

Objectif	*Étudier les variations d'une fonction numérique par transposition dans un cadre géométrique.*
Outils	*Premières définitions relatives aux fonctions numériques : monotonie sur un intervalle, extremum.*

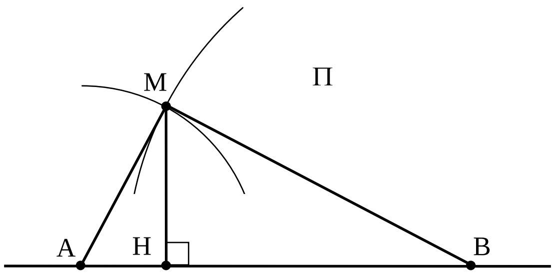
On se propose d'étudier comment varie le produit de deux nombres réels positifs dont la somme des carrés est constante.

Soit deux nombres réels positifs a et b dont la somme des carrés $a^2 + b^2$ est égale au nombre réel strictement positif k^2 (où k est strictement positif).

En fonction de a, le produit ab s'écrit donc $a\sqrt{k^2 - a^2}$.

Le problème consiste à étudier les variations de la fonction φ définie sur $[\,0\,;k\,]$ par : $\varphi(a) = a\sqrt{k^2 - a^2}$

A. Modélisation géométrique



Soit un segment $[AB]$ de longueur k et Π l'un des demi-plans de frontière (AB) ;

Soit M le point d'intersection, situé dans Π, du cercle de centre A et de rayon a, avec le cercle de centre B et de rayon b.

1. a. Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.

   Tracer le demi-cercle (Γ) de diamètre $[AB]$ situé dans Π.

   b. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

   Démontrer que $MA \times MB = AB \times MH$.

   D'où la traduction de φ en termes géométriques : $\varphi : AM \mapsto k \times MH$.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction φ.

   En prenant pour unité 10 cm et pour valeur de $k : 1$, montrer que les résultats établis dans la question précédente permettent de tracer point par point la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide d'un compas.

   Placer une dizaine de points appartenant à la courbe $\mathcal{C}$.

B. Existence d'un maximum

1. Observer que MH admet une valeur maximale pour une position de M que l'on précisera.

2. En déduire que la fonction φ admet un maximum pour une valeur de a que l'on précisera.

C. Variations du produit

1. M décrivant le demi-cercle (Γ) de A vers B, examiner les variations de MH, et en déduire les variations de $k \times \mathrm{MH}$.

2. Dresser le tableau des variations de la fonction φ sur l'intervalle $[\,0\,;\,k\,]$.

LA VOITURE INSUFFISANTE

Objectif	*Optimaliser à l'aide de graphiques*
Outils	*Fonctions affines et leurs représentations graphiques* *Homothéties.*

Voulant partir déjeuner, à bord de deux voitures, dans une auberge de campagne, neuf amis voient leur projet compromis par la panne de l'un des véhicules. La matinée étant avancée et l'espoir de trouver un garagiste bien mince, décision est prise de n'utiliser qu'un véhicule. Les amis se répartissent en deux groupes, la voiture amène le premier à destination puis revient chercher l'autre qui, pour ne pas perdre de temps, aura commencé le trajet à pied.

Cette stratégie est-elle la meilleure pour que les amis soient réunis le plus tôt possible à l'auberge ? C'est la question à laquelle on va répondre.

La distance restant à parcourir est de $26\ \mathrm{km}$. Les marcheurs avancent à $4\ \mathrm{km/h}$ et la voiture ne fait en moyenne que $36\ \mathrm{km/h}$ car le parcours est accidenté.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal : on porte le temps en abscisses ($1\ \mathrm{cm}$ pour $5\ \mathrm{min}$) et les distances en ordonnées ($1\ \mathrm{cm}$ pour $2\ \mathrm{km}$; on prendra la feuille dans le sens de la longueur). On appelle « diagramme du mouvement de la voiture » la courbe représentant la fonction d qui, à tout instant t, fait correspondre la distance entre le point de la panne et la voiture.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = 26$.

A. Stratégie adoptée par le groupe

1. La voiture amène le premier groupe à destination tandis que le deuxième groupe part à pied.
   a. Quelle est la nature du diagramme du mouvement de la voiture entre l'instant du départ (instant 0) et l'instant où le premier groupe arrive à destination ? Tracer ce diagramme.
   Soit A le point du diagramme correspondant à l'arrivée du premier groupe à l'auberge. Quelles sont les coordonnées de A ? Au bout de combien de temps le premier groupe arrive-t-il à destination ?
   b. Donner l'équation réduite du diagramme du mouvement du groupe de marcheurs.
   Déterminer graphiquement, puis par le calcul, la distance séparant le deuxième groupe du point de départ au moment où la voiture dépose le premier groupe à l'auberge. Soit B le point correspondant sur le graphique.

2. a. La voiture rebrousse chemin pour aller récupérer le groupe de marcheurs.
   Donner l'équation réduite du diagramme du mouvement de la voiture.
   b. Soit C le point du graphique correspondant à l'instant de la rencontre.
   Déterminer graphiquement, puis par le calcul, les coordonnées de C.
   Quel est l'instant de la rencontre ? À quelle distance du point de départ a-t-elle lieu ?

3. La voiture embarque les piétons et repart vers l'auberge.
   Donner l'équation réduite de cette phase du mouvement.

Déterminer graphiquement, puis par le calcul, l'instant de l'arrivée.

Soit D le point correspondant du graphique. Que dire des droites (OA) et (CD) ? Justifier.

B. Une meilleure stratégie

Quand tous sont réunis à l'auberge, Sophie, qui trouve avoir beaucoup marché, déclare : « Il est injuste qu'un seul groupe ait fait de la marche. J'aurais préféré que l'on partage le temps de marche : nous serions sans doute passés à table plus tôt. »

1. Soit E le point tel que $AOCE$ soit un parallélogramme. La droite (OE) coupe (Δ) en F.

   L'homothétie de centre O qui transforme E en F transforme A en A' et C en C'.

   a. Démontrer que la ligne brisée $OA'C'F$ est un diagramme possible du mouvement de la voiture et que les segments $[A'F]$ et $[OC']$ sont des diagrammes de mouvement possibles pour les marcheurs.

   b. Dans cette solution, les deux groupes sont toujours en mouvement (ils marchent ou sont transportés) et ils arrivent en même temps.

   Déterminer graphiquement l'instant d'arrivée et la distance parcourue par chaque groupe à pied et en voiture.

2. Quelques kilomètres avant l'auberge, la voiture laisse le premier groupe achever le chemin à pied et revient chercher les marcheurs pour les conduire à destination.

   Soit A'' le point du diagramme correspondant au premier arrêt de la voiture.

   a. Placer A'' en A_1, point quelconque du segment $[A'A]$.

   Construire les diagrammes des mouvements des deux groupes. On notera C_1 le point du diagramme correspondant à la rencontre de la voiture avec le deuxième groupe, F_1 et F'_1 les points correspondant aux arrivées des deux groupes.

   Construire le point E_1 tel que $OA_1E_1C_1$ soit un parallélogramme.

   Démontrer que O, F_1 et E_1 sont alignés (on pourra considérer l'homothétie de centre O transformant A_1 en A').

   Constater graphiquement que le choix de A_1 en A' est celui qui permet aux amis d'être réunis le plus tôt possible à l'auberge.

   b. Mener la même démarche en plaçant le point A'' en A_2, point quelconque du segment $[OA']$.

   Conclure.

   Dans l'hypothèse où la voiture repart chercher les marcheurs, constater graphiquement que le repas n'aura lieu plus tôt que dans le cas d'une arrivée groupée des amis.

BIEN SOUS TOUS RAPPORTS

Objectif	*Interpréter les représentations graphiques de fonctions numériques.* *Associer les propriétés d'une fonction rationnelle à celles des fonctions polynômes qui la composent.*
Outils	*Notions générales sur les fonctions numériques.* *Fonctions de référence : polynômes et fonctions rationnelles.*

Une fonction est le quotient d'une fonction affine par une fonction du second degré dont on connaît les courbes représentatives.

On se propose de déterminer quelques propriétés de cette fonction et de sa courbe représentative à partir des courbes données.

On s'intéresse également au problème réciproque.

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère :

– la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$ (où m et p sont des nombres réels non tous deux nuls) ;

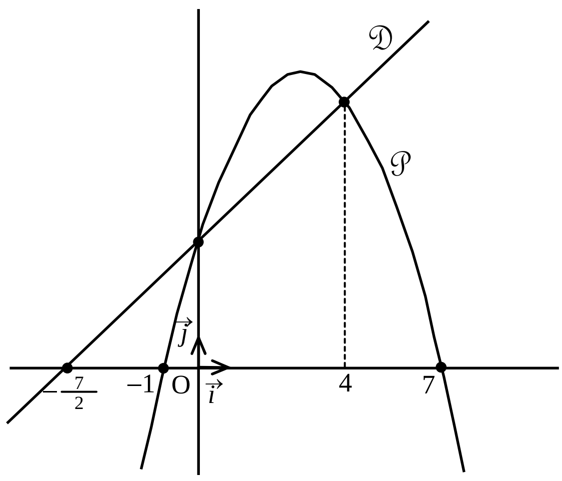
– la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (où a, b, c sont des nombres réels, a non nul).

On leur associe la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \dfrac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$,

et sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

On se propose de déterminer quelques propriétés de la fonction f et de la courbe $\mathcal{C}$ à partir des données relatives à la droite $\mathcal{D}$ et à la parabole $\mathcal{P}$, et réciproquement de retrouver des propriétés de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ connaissant $\mathcal{C}$.

A. Premiers indices



1. À partir des seuls éléments indiqués sur le graphique ci-contre, où ont été représentées la droite $\mathcal{D}$ et la parabole $\mathcal{P}$, déterminer :
   – l'ensemble de définition de la fonction f ;
   – les solutions de l'équation $f(x) = 0$;
   – les solutions de l'équation $f(x) = 1$;
   – le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. Interpréter graphiquement pour la courbe $\mathcal{C}$ les résultats trouvés.

FACULTATIF

On pourra ici expliciter la fonction f en déterminant une équation de la parabole $\mathcal{P}$ et une équation de la droite $\mathcal{D}$ à l'aide du seul paramètre a.

B. Ébauche

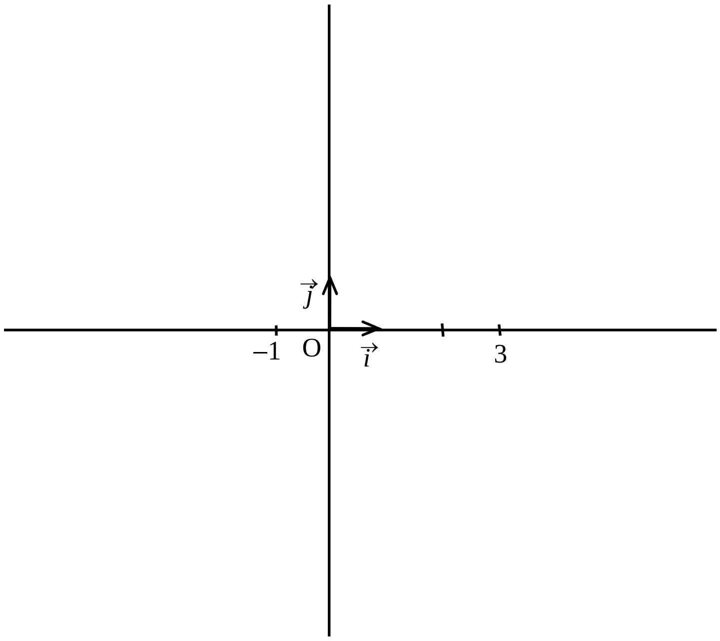
Réaliser un graphique représentant une droite $\mathcal{D}$ et une parabole $\mathcal{P}$ sachant que la courbe $\mathcal{C}$ associée vérifie à la fois :

– $\mathcal{C}$ n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe des ordonnées ;

– $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 3 ;

– la droite d'équation $y = 1$ coupe $\mathcal{C}$ en un seul point d'abscisse -1 ;

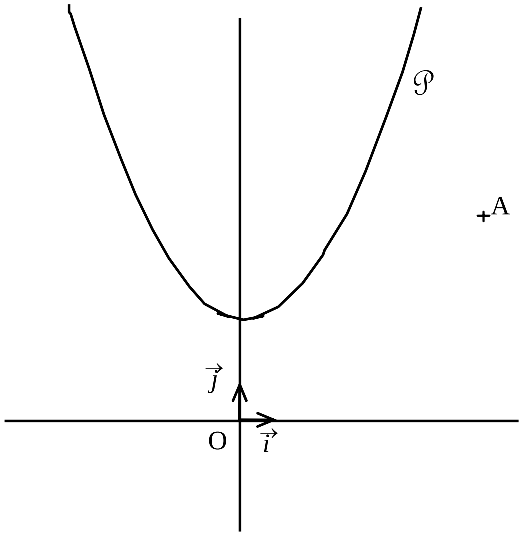
– $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$.



C. Cas de symétrie

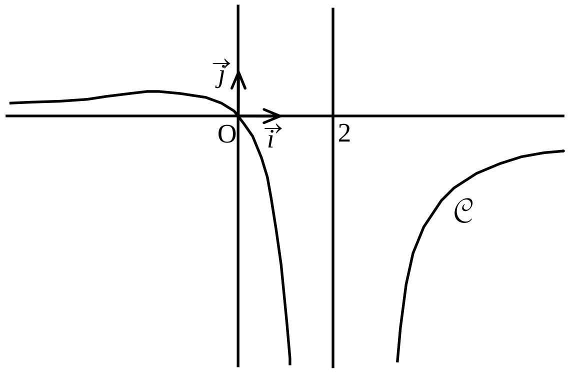
Sachant que la parabole $\mathcal{P}$ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, et que la droite $\mathcal{D}$ passe par le point A, tracer cette droite $\mathcal{D}$ en sorte que :

1. la fonction associée soit paire ;
2. la fonction associée soit impaire.



D. Termes du rapport

1. Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}$ admettent pour asymptote la droite d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.



2. À partir des seuls éléments indiqués sur le graphique ci-contre où ont été représentées la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes d'équations respectives $x = 2$ et $y = 0$, donner :
   – l'ensemble de définition de la fonction f ;
   – les solutions de l'équation $f(x) = 0$;
   – les solutions de l'équation $f(x) = 1$;
   – le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

3. Lequel des schémas ci-dessous pourrait représenter la droite $\mathcal{D}$ et la parabole $\mathcal{P}$ correspondant à la courbe $\mathcal{C}$? Donner des arguments permettant d'éliminer les autres.

   Réaliser un autre schéma plausible.

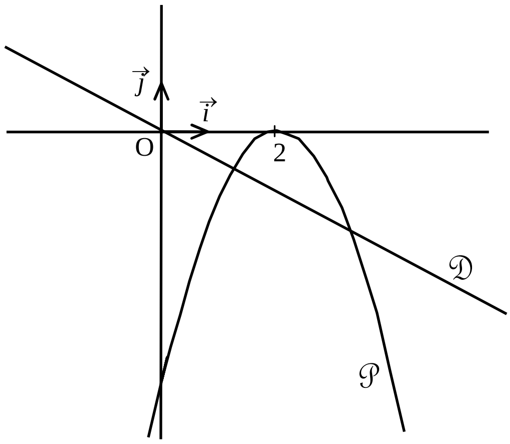


SCHÉMA A

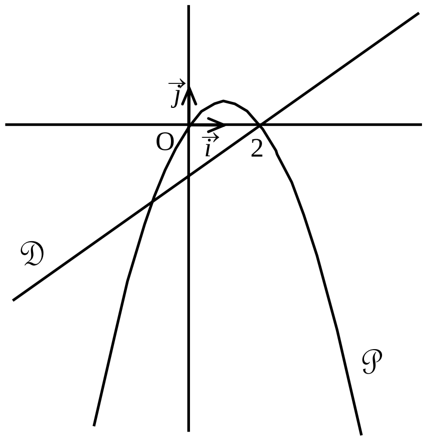


SCHÉMA B

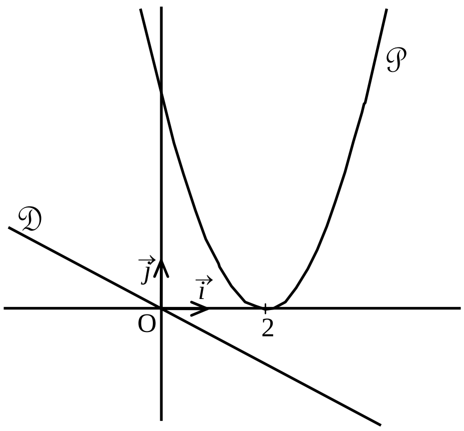


SCHÉMA C

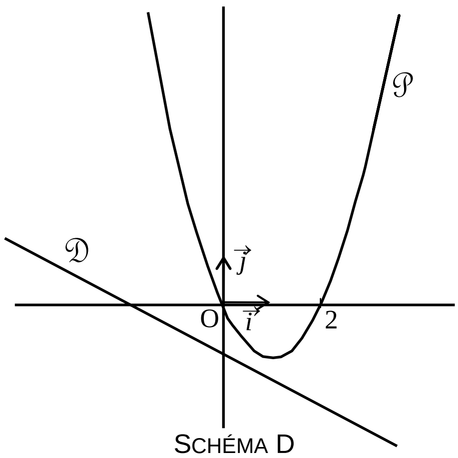
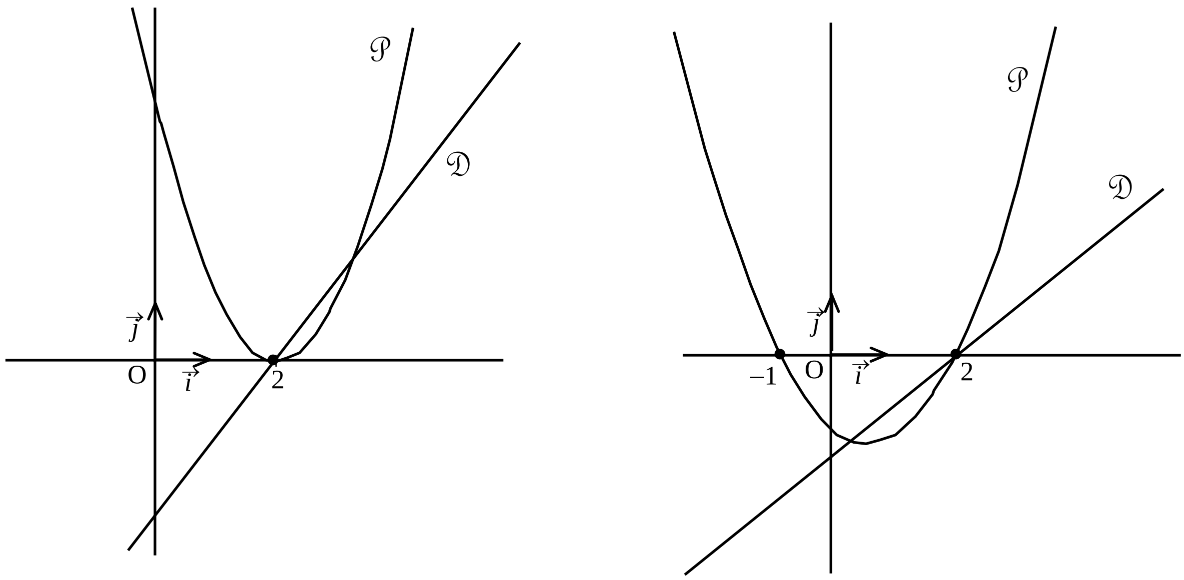


SCHÉMA D

E. Sujet d'étude : solution de facilité

Sur chacun des graphiques ci-dessous ont été représentées une droite $\mathscr{D}$ et une parabole $\mathscr{P}$.

On se propose de déterminer, pour chacun d'eux, et à partir des seuls éléments indiqués sur le dessin, la forme de la fonction f et l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ qui leur sont associées.



On rappelle que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont pour équations respectives $y = mx + p$ et $y = ax^2 + bx + c$, la fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{mx + p}{ax^2 + bx + c}$.

1. Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ à l'aide du seul paramètre m.
2. Donner une équation de la parabole $\mathscr{P}$ à l'aide du seul paramètre a.
3. En déduire l'expression de $f(x)$, puis la nature de $\mathscr{C}$.
4. Quel est le signe du quotient $\dfrac{m}{a}$?
5. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

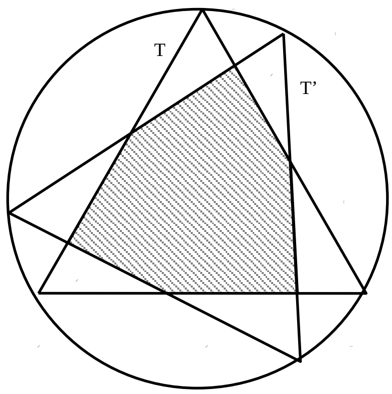
Intersections minimales

Objectif	*Optimaliser dans un contexte géométrique*
Outils	*Trigonométrie* *Variation de fonctions (avec ou sans dérivée)* *Angles orientés* *Transformations*

On se propose de résoudre le problème de baccalauréat d'avril 1921

A. Énoncé

Soit un triangle équilatéral T inscrit dans un cercle de rayon $2a$ et de centre O. On fait tourner ce triangle d'un angle α autour du point O. Il prend la position $\mathrm{T'}$.

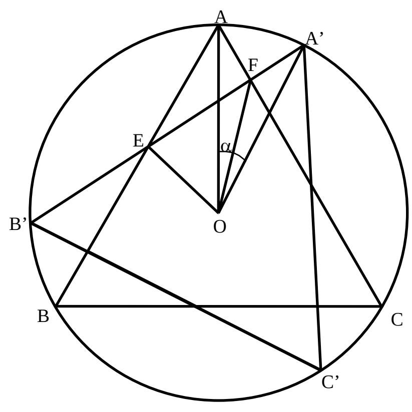


1. Calculer l'aire S de la partie commune aux deux triangles équilatéraux T et $\mathrm{T'}$. On exprimera S en fonction de $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = t$.
2. Étudier les variations de S quand on fait varier l'angle α.

> REMARQUE
> Les candidats de l'époque n'avait que cet énoncé.
> La fonction tangente était notée tg au lieu de $\tan$ actuellement.

B. Résolution

Il semble plus opportun aujourd'hui de ne pas suivre la méthode utilisant $\tan\dfrac{\alpha}{2}$, suggérée par le texte.



1. Exploration graphique.

   Conjecturer les variations de cette aire en « déplaçant » le point $\mathrm{A'}$ (on pourra utiliser Géoplan).

2. Simplification du problème.

   a. Soit Δ la médiatrice de $[\mathrm{AA'}]$. Démontrer que les triangles ABC et $\mathrm{A'C'B'}$ sont symétriques par rapport à Δ.

   En déduire que la droite (OF) est un axe de symétrie de la figure.

   b. En déduire que l'aire cherchée est égale à six fois l'aire du triangle OEF.

3. Calcul de l'aire du triangle OEF.

a. Démontrer que : $\widehat{EOF} = \frac{\pi}{3}$ $\widehat{EFO} = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}$ $\widehat{OEF} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

b. En considérant le triangle EOF, exprimer EF en fonction de EO et de α.

En considérant le triangle EOA', exprimer EO en fonction de OA' et de α.

En déduire que : $EF = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\frac{1}{2}}$.

(utiliser ou établir la formule $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$).

c. Soit H le projeté orthogonal de O sur [A'B'].

Démontrer que : $OH = \frac{R}{2}$.

d. Calculer l'aire $S(\alpha)$ de la partie intérieure commune aux deux triangles ABC et A'B'C'.

4. Conclusion.

Étudier le sens de variation de S sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$.

DOCUMENT PROFESSEUR

Figure et courbe réalisés avec Géoplan Windows