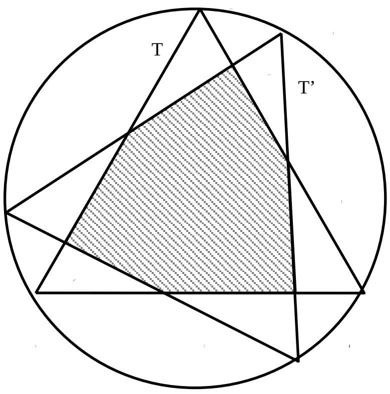
INTERSECTIONS MINIMALES

Objectif	*Optimaliser dans un contexte géométrique*
Outils	*Trigonométrie* *Variation de fonctions (avec ou sans dérivée)* *Angles orientés* *Transformations*

On se propose de résoudre le problème de baccalauréat d'avril 1921

A. Énoncé

Soit un triangle équilatéral T inscrit dans un cercle de rayon $2a$ et de centre O. On fait tourner ce triangle d'un angle α autour du point O. Il prend la position $\mathrm{T'}$.

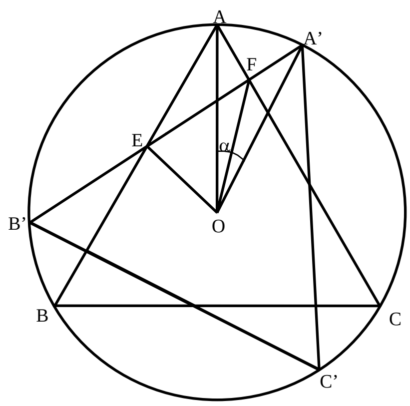


1. Calculer l'aire S de la partie commune aux deux triangles équilatéraux T et $\mathrm{T'}$. On exprimera S en fonction de $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = t$.
2. Étudier les variations de S quand on fait varier l'angle α.

> REMARQUE
> Les candidats de l'époque n'avait que cet énoncé.
> La fonction tangente était notée tg au lieu de $\tan$ actuellement.

B. Résolution

Il semble plus opportun aujourd'hui de ne pas suivre la méthode utilisant $\tan\dfrac{\alpha}{2}$, suggérée par le texte.



1. Exploration graphique.

   Conjecturer les variations de cette aire en « déplaçant » le point $\mathrm{A'}$ (on pourra utiliser Géoplan).

2. Simplification du problème.

   a. Soit Δ la médiatrice de $[\mathrm{AA'}]$. Démontrer que les triangles ABC et $\mathrm{A'C'B'}$ sont symétriques par rapport à Δ.

   En déduire que la droite (OF) est un axe de symétrie de la figure.

   b. En déduire que l'aire cherchée est égale à six fois l'aire du triangle OEF.

3. Calcul de l'aire du triangle OEF.

a. Démontrer que : $\widehat{\mathrm{EOF}} = \dfrac{\pi}{3}$ $\widehat{\mathrm{EFO}} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}$ $\widehat{\mathrm{OEF}} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$

b. En considérant le triangle EOF, exprimer EF en fonction de EO et de α.

En considérant le triangle EOA', exprimer EO en fonction de OA' et de α.

En déduire que : $\mathrm{EF} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \dfrac{R}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{R}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \alpha\right) + \dfrac{1}{2}}$.

(utiliser ou établir la formule $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$).

c. Soit H le projeté orthogonal de O sur [A'B'].

Démontrer que : $\mathrm{OH} = \dfrac{R}{2}$.

d. Calculer l'aire $S(\alpha)$ de la partie intérieure commune aux deux triangles ABC et A'B'C'.

4. Conclusion.

Étudier le sens de variation de S sur l'intervalle $\left[\, 0 \,; \dfrac{2\pi}{3} \,\right]$.

DOCUMENT PROFESSEUR

Figure et courbe réalisés avec Géoplan Windows