SOMME À PRODUIT CONSTANT

Objectif	*Étudier les variations d'une fonction numérique par transposition dans un cadre géométrique.*
Outils	*Premières définitions relatives aux fonctions numériques : monotonie sur un intervalle, extremum.*

On se propose d'étudier comment varie la somme de deux nombres réels positifs dont le produit est constant.

Soit deux nombres réels positifs a et b dont le produit ab est égal au nombre réel strictement positif p.

En fonction de a, la somme $a+b$ s'écrit donc $a+\dfrac{p}{a}$.

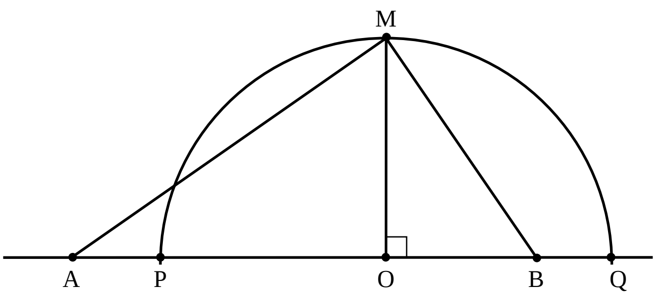
Le problème consiste à étudier les variations de la fonction s définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $s(a)=a+\dfrac{p}{a}$.

A. Modélisation géométrique

Soit un demi-cercle (Γ) de centre O et de diamètre [PQ] tel que $\mathrm{PQ}=2\sqrt{p}$.

Soit M le point d'intersection de (Γ) et de la perpendiculaire en O à la droite (PQ).

On note A le point de la demi-droite [OP) tel que $\mathrm{OA}=a$, et B le point de la demi-droite [OQ) tel que $\mathrm{OB}=b$. Par suite $\mathrm{AB}=a+b$.



1. Vérifier que: $\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\mathrm{OM}^2$.
   Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.
   En déduire une construction géométrique du point B, le point A étant choisi sur la demi-droite [OP).

D'où la traduction de s en termes géométriques : $s : \mathrm{OA}\mapsto\mathrm{AB}$.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction s. (On prendra pour unité graphique le centimètre et 9 pour valeur de p).
   Montrer comment la construction géométrique décrite dans la question précédente permet de tracer point par point la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide d'un compas. Tracer une dizaine de points de cette courbe.

B. Existence d'un minimum

1. Soit Ω le milieu du segment $[AB]$. Démontrer que $\Omega M \geq OM$.

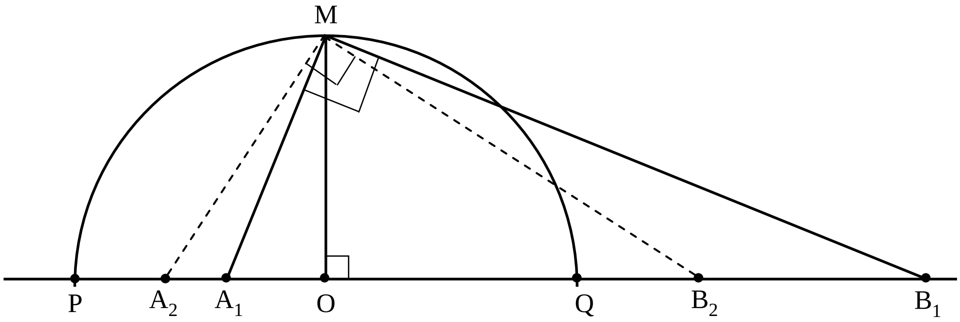
   En déduire que la distance AB admet pour valeur minimale $2\sqrt{p}$ et préciser les positions correspondantes des points A et B.

2. En déduire que la fonction s admet un minimum pour une valeur a que l'on précisera.

C. Variation de la somme

1. On considère deux nombres réels a_1 et a_2 vérifiant: $0 < a_1 < a_2 \leq \sqrt{p}$ et les couples de points $(A_1 ; B_1)$ et $(A_2 ; B_2)$ qui leurs sont associés.

   Il s'agit de comparer $s(a_1)$ et $s(a_2)$, soit A_1B_1 et A_2B_2.



   a. Démontrer que $A_1B_1 - A_2B_2 = B_1B_2 - A_1A_2$.

   b. Démontrer que $OA_1 \leq OB_1$ et $OA_2 \leq OB_2$. En déduire que $MA_1 \leq MB_1$ et $MA_2 \leq MB_2$.

   c. Démontrer que l'aire du triangle MA_1A_2 est inférieure à l'aire du triangle MB_1B_2.

   Indication : utiliser un quart de tour de centre M.

   En déduire que $A_1A_2 \leq B_1B_2$, puis que $A_1B_1 \geq A_2B_2$.

   d. En déduire les variations de la distance AB lorsque A décrit le segment $[OP]$ de O (non compris) vers P.

2. Reprendre cette comparaison pour deux nombres réels a_1 et a_2 vérifiant $\sqrt{p} \leq a_1 < a_2$.

3. Dresser le tableau des variations de la fonction s sur l'intervalle $]\,0 ; +\infty\,[$.