II – Continuité et limites

C'EST TRÈS LIMITE MAIS ÇA CONTINUE

Objectif	*Démontrer la continuité ou la discontinuité en un réel de différentes fonctions.*
Outils	*Limite en un réel, limite à droite et à gauche en un réel.* *Définition de la continuité en un réel a d'une fonction réelle de variable réelle, sous la forme $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.* *Théorème sur $\lim_{n \to +\infty} f(u_n)$, lorsque u converge vers un réel a et f admet une limite en a. Ces théorèmes sont rappelés en début de texte.*

On se propose d'étudier la continuité en 0 de différentes fonctions.

Rappels

On dit qu'une fonction f, définie en a, est continue en a, si f admet $f(a)$ pour limite en a.

Si (u_n) est une suite de réels convergeant vers a, et si f est une fonction qui admet pour limite ℓ en a, alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

Exercices

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   Tracer la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice graphique.
   Étudier la continuité de f en 0.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ si $x < 0$, $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$ si $x > 0$, et $g(0) = 0$.
   Étudier la continuité de g en 0.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$
   Tracer la courbe représentative de h sur l'écran de la calculatrice graphique.
   Étudier la continuité de h en 0. On pourra considérer les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2n.\pi$ et $v_n = 2n.\pi + \dfrac{\pi}{2}$, et raisonner par l'absurde.

4. Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$

   a. Étudier la continuité de F en 0.

   b. Soit T la fonction définie sur **R** par $T(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $T(0) = 0$.

      Étudier la continuité de T en 0.

   c. Relativement à la courbe représentative de la fonction F, quelle est l'interprétation graphique des limites de T à droite et à gauche en zéro ?

5. On appelle fonction partie entière, et on note E, la fonction qui, à tout réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x. En conséquence, pour tout réel x, on a : $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leq x$.

On considère les fonctions G_1, G_2 et G_3 définies sur **R** par :

$G_1(0) = 0$ et, pour tout réel x non nul, $G_1(x) = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

$G_2(0) = 1$ et, pour tout réel x non nul, $G_2(x) = x.\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

$G_3(0) = 0$ et, pour tout réel x non nul, $G_3(x) = x^2.\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Esquisser les courbes représentatives de ces trois fonctions, puis étudier la continuité de chacune d'elles en 0.

6. Soit H la fonction définie sur **R** par $H(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $H(0) = 0$.

   a. Tracer la courbe représentative de H sur l'écran de la calculatrice graphique.

   b. Démontrer que H est continue en 0.

      Démontrer que H est dérivable sur **R** et donner l'expression de $H'(x)$ pour tout réel x.

   c. Étudier la continuité en 0 de la fonction H'.

À SAUTE FONCTION

Objectif	*Examiner des fonctions discontinues en certains réels et critiquer les représentations graphiques inexactes fournies par les calculatrices graphiques.* *Étudier la continuité en un réel de la somme, du produit, de la composée de deux fonctions, suivant que chacune d'elles est, ou non, continue.*
Outils	*Limite en un réel. Limite à droite et à gauche.* *Définition de la continuité en un réel a sous la forme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.* *Continuité de la somme, du produit, de la composée, de deux fonctions continues.* *Dans cette séquence, la définition et les théorèmes sont rappelés.*

Une fonction f est continue en a si f admet $f(a)$ pour limite en a. Si deux fonctions sont continues en un point, leur somme, leur produit, est aussi continu en ce point. De même, si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors la composée de f suivie de g est continue en a. Mais que conclure si l'une des fonctions de départ n'est pas continue "là où il le faut" ?

L'étude de quelques fonctions bâties à partir de la fonction « partie entière » va tenter d'apporter des éléments de réponse.

A. La fonction « partie entière »

On appelle fonction « partie entière », et on note E, la fonction qui, à tout nombre réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. a. Donner la valeur des expressions suivantes :

$\mathrm{E}(0)$	$\mathrm{E}(0{,}5)$	$\mathrm{E}(0{,}999\ 9)$	$\mathrm{E}(1)$	$\mathrm{E}(1{,}5)$	$\mathrm{E}(1{,}999\ 999)$	$\mathrm{E}(2)$
$\mathrm{E}(-5{,}1)$	$\mathrm{E}(-5)$	$\mathrm{E}(-1{,}000\ 1)$	$\mathrm{E}(-1)$	$\mathrm{E}(-0{,}999)$	$\mathrm{E}(-0{,}5)$	$\mathrm{E}(-0{,}000\ 001)$

   b. Tracer la courbe représentative de la fonction E.

2. Étudier la continuité de la fonction E en tout réel a.

3. Faire tracer par la calculatrice graphique la courbe représentative de la fonction E.

   Ce tracé est-il correct ? Le cas échéant, expliquer d'où vient l'erreur commise par la calculatrice.

B. Continuité en un réel d'une somme de fonctions

Soit a un nombre réel. On rappelle que, si les fonctions f et g sont définies et continues en a, alors la fonction somme $f+g$ est continue en a. f ou g étant discontinue en a, peut-on conclure sur $f+g$?

1$^{\text{er}}$ cas : f est continue en a et g discontinue en a

a. Exemple. Soit $f : x \mapsto x$; $g : x \mapsto -\mathrm{E}(x)$; alors $f+g : x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$. Tracer la courbe représentative de $f+g$ dans un repère du plan. En quels réels $f+g$ semble-t-elle être discontinue ? (on ne demande pas de démonstration).

b. Résultat général. Soit f et g deux fonctions définies en un réel a. En raisonnant par l'absurde, démontrer que, si f est continue en a et si g est discontinue en a, alors $f+g$ est discontinue en a.

2^e cas : f et g sont discontinues en a.

a. Soit n un entier naturel non nul et φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \mathrm{E}(x) + (x - \mathrm{E}(x))^n$. Démontrer que φ est continue sur $\mathbf{R}$.

b. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\psi(x) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(1 - x)$.

Démontrer que ψ est discontinue en tout entier relatif et esquisser la courbe représentative de ψ dans un repère. Faire afficher la courbe représentative de ψ sur l'écran de la calculatrice et critiquer cette représentation graphique.

c. Démontrer, en donnant des exemples, que, si f et g sont discontinues en a, $f + g$ peut être soit continue, soit discontinue en a.

C. Continuité en un réel d'un produit de fonctions

Soit a un nombre réel. On rappelle que, si les fonctions f et g sont définies et continues en a, alors la fonction produit $f \, . \, g$ est continue en a. De plus, si une fonction f est définie en a, continue en a, et si $f(a)$ n'est pas nul, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.

f ou g étant discontinue en a, peut-on conclure sur $f . g$?

1^{er} cas : f est continue en a, avec $f(a) \neq 0$, et g est discontinue en a.

Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $f . g$ est discontinue en a.

2^e cas : f est continue en a, avec $f(a) = 0$, et g est discontinue en a

a. Démontrer, en donnant des exemples, que $f . g$ peut être soit continue, soit discontinue en a. (On pourra considérer les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout réel non nul et $g(0) = 0$.)

b. On suppose que la fonction g est bornée au voisinage de a.

Démontrer alors que $f . g$ est continue en a.

3^e cas : f et g sont discontinues en a.

Démontrer que $f . g$ peut être soit continue, soit discontinue en a.

D. Continuité en un réel de la composée de deux fonctions

On considère dans cette partie une fonction f définie sur un intervalle I, une fonction g définie sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$ et un réel a de I.

On rappelle que, si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a.

f étant discontinue en a et / ou g étant discontinue en $f(a)$, peut-on conclure sur $g \circ f$?

1^{er} cas : f est continue en a et g est discontinue en $f(a)$.

Démontrer, en donnant des exemples, que $g \circ f$ peut être soit continue, soit discontinue en a.

2^e cas : f est discontinue en a et g est continue en $f(a)$.

Même consigne. On pourra considérer, entre autres, $f : x \mapsto \mathrm{E}(x) + \dfrac{1}{x}$; $g : x \mapsto |x|$.

3^e cas : f est discontinue en a et g est discontinue en $f(a)$

Même consigne. On pourra considérer, entre autres, $f : x \mapsto \mathrm{E}(x) + \dfrac{1}{x}$; $g : x \mapsto x - \mathrm{E}(x)$.

DINOSTRATE PASSE À LA LIMITE

Objectif	*Étudier une construction géométrique du nombre π due aux mathématiciens grecs de l'Antiquité[1] et comportant un passage à la limite.*
Outils	*Limite, pour x tendant vers 0, de $\frac{\sin x}{x}$. Prolongement par continuité.*

Il s'agit d'étudier une construction géométrique du nombre π due aux mathématiciens grecs de l'Antiquité et comportant un passage à la limite.

A. Construction de la courbe d'HIPPIAS

Hippias d'Élis vivait un peu avant 400 avant Jésus-Christ. Il inventa la courbe suivante :

> ABCD est un carré de sens direct.
> E étant un point mobile sur le quart de cercle $\overparen{BD}$ de centre A, le segment [AE] tourne à vitesse angulaire constante autour de A, en partant de la position [AB].
> F étant un point mobile sur [AB], et Δ la droite passant par F et perpendiculaire à (AB), Δ part de la position (BC) et se déplace parallèle à elle-même, à vitesse constante, de telle façon que Δ arrive sur (AD) exactement au même instant que [AE] arrive sur [AD].
> À tout instant, sauf à l'instant final, le point M est l'intersection du segment [AE] et de la droite Δ.
> La trajectoire du point M est alors la *Courbe d'Hippias*.

On suppose, une unité de temps ayant été choisie, que les deux mouvements démarrent à l'instant $t = 0$ et s'achèvent à l'instant $t = 1$. On note E_t, F_t les positions des points E et F à l'instant t, pour t élément de $[\,0\,;1\,]$ et M_t la position du point M pour t élément de $[\,0\,;1\,[$.

1. Tracer un carré ABCD de côté 1 dm, avec [AB] horizontal et $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

   Placer les points E_t, F_t, M_t , pour les valeurs suivantes de t (à l'exception de M_t pour $t = 1$).

   $0\,,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{31}{32},\ \frac{63}{64},\ 1.$ (On pourra construire des bissectrices)

   En admettant que la courbe soit « continue », relier les différents points pour obtenir la courbe d'Hippias.

2. Le point M_t est-il défini, pour $t = 1$? Constater que , lorsque t tend vers 1, M_t s'approche d'une position limite H. Évaluer graphiquement la distance AH.

B. Fonction associée à la courbe d'HIPPIAS

Les Grecs de l'Antiquité n'utilisaient pas le concept de fonction. Il est en revanche assez naturel, à notre époque, de rechercher une fonction f dont la courbe d'Hippias soit la représentation graphique.

On se situe dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$. Pour tout réel t de $[\,0\,;1\,[$, on note x et y l'abscisse et l'ordonnée du point M_t.

[1] Référence bibliographique : « Mathématiques et mathématiciens » - Dedron et Itard - éd. Magnard, 1960, p. 415-416.

1. Exprimer x en fonction de t. Exprimer en fonction de t la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM_t})$.

2. Démontrer que, pour $t \neq 0$, $y = \dfrac{x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$.

   On admet donc que la courbe d'Hippias est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 0$.

3. Faire tracer la courbe représentative de f par la calculatrice graphique.

4. On recherche la limite de f en 0.

   Démontrer que si l'on pose $X = \dfrac{\pi}{2}x$, $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = \dfrac{2}{\pi}.\cos X.\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin X}{X}\right)}$.

   En déduire la limite de f en 0. Expliquer comment f peut être prolongée par continuité en 0.
   En déduire l'ordonnée du point H, et comparer avec la valeur obtenue graphiquement.

C. La quadrature du cercle par DINOSTRATE

On attribue à Dinostrate, qui vécut un peu plus tard, entre 400 et 300 avant Jésus-Christ, d'avoir précisé la position du point H. La démonstration[2] de Dinostrate procédait de façon exclusivement géométrique, et ne se servait pas du concept de limite que ne connaissaient pas les mathématiciens grecs de l'Antiquité.

1. Le résultat établi dans la partie B peut s'écrire : $\mathrm{AH} = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{AB}$. Démontrer que cette relation équivaut à : $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AH}} = \dfrac{\mathrm{mes}(\overset{\frown}{\mathrm{DEB}})}{\mathrm{AD}}$, où $\mathrm{mes}(\overset{\frown}{\mathrm{DEB}})$ désigne la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{DEB}}$.

Dinostrate exprimait ce résultat de la façon suivante :

Proposition de Dinostrate : Le segment AD est au segment AH comme l'arc DEB est au segment AD.

Dinostrate déduisait de cette relation une construction géométrique du nombre que nous appelons aujourd'hui π, puis une quadrature du cercle.

2. Tracer la parallèle à (BH) passant par D. Elle coupe (AB) en P. Construire le symétrique $\mathrm{P'}$ de A par rapport à P. Démontrer que la proposition de Dinostrate entraîne que $\dfrac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{AB}} = \pi$.

   Quelle approximation de π donne la figure ?

3. Démontrer que l'aire du rectangle de côtés $[\mathrm{AD}]$ et $[\mathrm{AP'}]$ est égale à l'aire du cercle de rayon $[\mathrm{AB}]$.

4. Placer le point Q tel que $\overrightarrow{\mathrm{P'Q}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Tracer un demi-cercle de diamètre $[\mathrm{AQ}]$. La perpendiculaire à (AQ) passant par $\mathrm{P'}$ coupe ce demi-cercle en R.

   Vérifier que $[\mathrm{P'R}]$ est le côté d'un carré ayant même aire que le disque de rayon $[\mathrm{AB}]$.

Dinostrate arrive donc à réaliser un des grands objectifs des mathématiques grecques : **la quadrature du cercle**, c'est-à-dire la construction d'un carré ayant même aire qu'un disque donné.

La quadrature du cercle n'est en fait pas possible à la règle et au compas, seuls instruments de construction que s'autorisaient les grecs[3].
La méthode de Dinostrate réalise cette quadrature mais en utilisant l'opération de passage à la limite, qui ne permet pas de construction parfaitement exacte, et qui était refusée par les plus puristes des géomètres de l'antiquité.

---

[2] La démonstration figure dans l'ouvrage cité en référence.

[3] Cette impossibilité ne fut établie qu'au XIXe siècle.

LES BORNES ATTEINTES, IL N'Y A PLUS DE LIMITE

Objectif	*Montrer que l'on peut obtenir des fonctions discontinues à partir de fonctions continues par passages à la limite de suites ou de fonctions, ou par dérivation.*
Outils	*Limites, limite à droite, limite à gauche, continuité, démonstration par récurrence.*

Il ne faut pas penser que toutes les fonctions sont continues. Mieux, les fonctions discontinues ne sont pas des objets mathématiques aussi rares, aussi abstraits, aussi artificiels qu'on pourrait le croire. Elles peuvent intervenir naturellement, par exemple en électronique, en physique plus généralement, mais aussi en mathématiques.

Les exercices de cette séquence présentent différentes situations mathématiques où la continuité mène à la discontinuité.

Les différentes parties sont indépendantes.
On rappelle qu'une fonction f est continue en a si f admet pour limite $f(a)$ en a.

A. Non continuité d'une fonction limite de fonctions continues

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère.

1. a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le sens de variation de f_n.

   Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par deux points fixes.

   b. Soit n et m deux entiers naturels non nuls avec $n < m$. Comparer $f_m(x)$ et $f_n(x)$ suivant les valeurs de x.

   En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_m$.

   c. Esquisser les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$. Préciser les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f_n(x)$ admet une limite $f(x)$. On définit ainsi une fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

   Expliciter la fonction f. Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

   b. Étudier la continuité de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

B. Non continuité de la fonction limite d'une suite croissante de fonctions continues

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur **R** par $f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(nx)^2 + 1}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisses ; 5 cm en ordonnées).

1. Étudier les variations de f_n.

2. Démontrer que, si m et n sont deux entiers tels que $1 \leq m < n$, alors, pour tout réel x, $f_m(x) \leq f_n(x)$. On traduit cela en disant que la suite de fonctions (f_n) est croissante.

3. a. Déterminer les points de $\mathcal{C}_1$ d'abscisses 0 ; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 10.

   b. Tracer la partie de $\mathcal{C}_1$ correspondant à des abscisses comprises entre -5 et 5.

   c. Démontrer que, pour tout entier n non nul et tout réel x : $f_n(x) = f_1(nx)$.

   Déduire alors de la question a différents points de $\mathcal{C}_2$, puis de $\mathcal{C}_{10}$, et tracer $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_{10}$ sur la même figure.

4. a. Démontrer que, pour tout réel x, $f_n(x)$ admet une limite $f(x)$. On définit ainsi une fonction f sur **R**. Expliciter cette fonction puis tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

   b. Étudier la continuité de f sur **R**.

C. Non continuité d'une limite de suite, par rapport à la condition initiale

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{1}{2}(-x^3 + 3x)$.

Pour tout réel a de l'intervalle $\mathrm{I} = [\,-1\,;\,1\,]$, on considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Lorsque, pour un certain réel a, la suite u possède une limite, on note celle-ci $L(a)$.
On s'intéresse à la fonction L ainsi définie.

1. Étude graphique et conjecture.

   a. Étudier les variations de f sur I.

   b. Tracer, pour des abscisses appartenant à I, la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

   c. Par des explorations graphiques, conjecturer la limite de la suite u, c'est-à-dire la valeur de $L(a)$.

   d. Étudier alors la continuité de la fonction L sur I.

2. Démonstrations

   Premier cas : on suppose que $a = u_0$ appartient à l'intervalle $]\,0\,;\,1\,]$

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $]\,0\,;\,1\,]$.

   b. Démontrer que, pour tout réel x de $]\,0\,;\,1\,]$, $f(x) \geq x$. En déduire que la suite u est croissante.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $1 - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 - u_n)(2 - u_n^2 - u_n)$.

   En déduire $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \lambda(1 - u_n)$, où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1}{2}(2 - u_0^2 - u_0)$.

d. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \le 1-u_n \le \lambda^n(1-u_0)$.

En déduire que la suite u converge vers 1.

Deuxième cas : on suppose que $a = u_0$ appartient à l'intervalle $[-1\ ;\ 0\ [$.

a. On considère la suite $v = -u$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $f(v_n) = v_{n+1}$. On utilisera le fait que la fonction f est impaire.

b. En utilisant la question 1, démontrer que v est convergente.

En déduire que u est convergente.

3. Expliciter la fonction L.

D. Non continuité par rapport à un paramètre d'une limite de suite définie par récurrence

On note φ la fonction définie sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par $\begin{cases} \varphi(x) = x \text{ si } x \in [\ 0\ ;1\ [\\ \varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x+1) \text{ si } x \in [\ 1\ ;+\infty\ [\end{cases}$.

Pour tout nombre réel λ de l'intervalle $]\ 0\ ;\ 2\ [$, on considère la fonction f_λ définie sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par $f_\lambda(x) = \lambda\varphi(x)$. On a donc $\begin{cases} f_\lambda(x) = \lambda x \text{ si } x \in [\ 0\ ;1\ [\\ f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{2}(x+1) \text{ si } x \in [\ 1\ ;+\infty\ [\end{cases}$.

f_λ permet de définir la suite positive u de premier terme $u_0 = 0{,}8$, vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$, pour tout entier naturel n.

Dans le cas où la suite u admet une limite, celle-ci dépend de λ puisque la fonction f_λ et la suite u dépendent de λ ; on la notera $L(\lambda)$. On s'intéresse à la fonction L.

1. Étude graphique et conjecture.

a. Démontrer la continuité de la fonction φ sur son ensemble de définition.

En déduire la continuité de f_λ, λ étant un élément quelconque de $]\ 0\ ;\ 2\ [$.

b. En prenant un repère orthonormal et une unité graphique de $4\,\text{cm}$, tracer, sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 4\ ]$, sur trois graphiques différents, les courbes respectives des fonctions f_λ pour $\lambda = 1$, $\lambda = 0{,}5$, $\lambda = 1{,}5$.

c. Dans chacun des cas précédents, en utilisant la droite d'équation $y = x$, construire les premiers termes de la suite u, puis conjecturer la limite de cette suite, c'est-à-dire la valeur de $L(\lambda)$.

d. Représenter la fonction L sur $]\ 0\ ;\ 2\ [$ et étudier la continuité de L sur cet intervalle.

2. Détermination de $L(\lambda)$ pour $0 < \lambda \le 1$.

On suppose que λ appartient à l'intervalle $]\ 0\ ;\ 1\ ]$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est dans l'intervalle $[\ 0\ ;\ 1\ [$.

b. Déterminer la nature de la suite u, puis l'expression de son terme général.

c. En déduire la valeur de $L(\lambda)$, suivant les valeurs de λ élément de $]\ 0\ ;\ 1\ ]$.

3. Détermination de $L(\lambda)$ pour $1 < \lambda < 2$

On suppose que λ appartient à l'intervalle $]\,1\,;\,2\,[$.

a. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

> INDICATION
> On raisonnera par l'absurde, en montrant que, si u_n est dans $[\,0\,;\,1\,]$ pour tout entier naturel n, alors la suite u tend vers $+\infty$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geq n_0$, u_k est dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α, dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.
Donner l'expression de α en fonction de λ.

d. Démontrer que la suite $(u_k - \alpha)$, avec $k \geq n_0$, est géométrique, puis déterminer sa limite.

e. En déduire la valeur de $L\,(\lambda)$, pour λ élément de $]\,1\,;\,2\,[$.

E. Non continuité d'une dérivée, ou d'une dérivée seconde.

On admettra ici que les fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admettent pas de limite en zéro.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

   Démontrer que f est continue et dérivable en 0, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

   Démontrer que g et que g' sont continues et dérivables en 0, mais que g'' n'est pas continue en 0.