LES BORNES ATTEINTES, IL N'Y A PLUS DE LIMITE

Objectif	*Montrer que l'on peut obtenir des fonctions discontinues à partir de fonctions continues par passages à la limite de suites ou de fonctions, ou par dérivation.*
Outils	*Limites, limite à droite, limite à gauche, continuité, démonstration par récurrence.*

Il ne faut pas penser que toutes les fonctions sont continues. Mieux, les fonctions discontinues ne sont pas des objets mathématiques aussi rares, aussi abstraits, aussi artificiels qu'on pourrait le croire. Elles peuvent intervenir naturellement, par exemple en électronique, en physique plus généralement, mais aussi en mathématiques.

Les exercices de cette séquence présentent différentes situations mathématiques où la continuité mène à la discontinuité.

Les différentes parties sont indépendantes.
On rappelle qu'une fonction f est continue en a si f admet pour limite $f(a)$ en a.

A. Non continuité d'une fonction limite de fonctions continues

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f_n(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère.

1. a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le sens de variation de f_n.

   Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par deux points fixes.

   b. Soit n et m deux entiers naturels non nuls avec $n < m$. Comparer $f_m(x)$ et $f_n(x)$ suivant les valeurs de x.

   En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_m$.

   c. Esquisser les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$. Préciser les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f_n(x)$ admet une limite $f(x)$. On définit ainsi une fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

   Expliciter la fonction f. Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

   b. Étudier la continuité de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

B. Non continuité de la fonction limite d'une suite croissante de fonctions continues

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur **R** par $f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(nx)^2 + 1}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal (unités : 2 cm en abscisses ; 5 cm en ordonnées).

1. Étudier les variations de f_n.

2. Démontrer que, si m et n sont deux entiers tels que $1 \leq m < n$, alors, pour tout réel x, $f_m(x) \leq f_n(x)$. On traduit cela en disant que la suite de fonctions (f_n) est croissante.

3. a. Déterminer les points de $\mathcal{C}_1$ d'abscisses 0 ; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 10.

   b. Tracer la partie de $\mathcal{C}_1$ correspondant à des abscisses comprises entre -5 et 5.

   c. Démontrer que, pour tout entier n non nul et tout réel x : $f_n(x) = f_1(nx)$.

   Déduire alors de la question a différents points de $\mathcal{C}_2$, puis de $\mathcal{C}_{10}$, et tracer $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_{10}$ sur la même figure.

4. a. Démontrer que, pour tout réel x, $f_n(x)$ admet une limite $f(x)$. On définit ainsi une fonction f sur **R**. Expliciter cette fonction puis tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

   b. Étudier la continuité de f sur **R**.

C. Non continuité d'une limite de suite, par rapport à la condition initiale

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{1}{2}(-x^3 + 3x)$.

Pour tout réel a de l'intervalle $\mathrm{I} = [\,-1 ; 1\,]$, on considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Lorsque, pour un certain réel a, la suite u possède une limite, on note celle-ci $L(a)$.
On s'intéresse à la fonction L ainsi définie.

1. Étude graphique et conjecture.

   a. Étudier les variations de f sur I.

   b. Tracer, pour des abscisses appartenant à I, la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

   c. Par des explorations graphiques, conjecturer la limite de la suite u, c'est-à-dire la valeur de $L(a)$.

   d. Étudier alors la continuité de la fonction L sur I.

2. Démonstrations

   Premier cas : on suppose que $a = u_0$ appartient à l'intervalle $]\,0 ; 1\,]$

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $]\,0 ; 1\,]$.

   b. Démontrer que, pour tout réel x de $]\,0 ; 1\,]$, $f(x) \geq x$. En déduire que la suite u est croissante.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $1 - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 - u_n)(2 - u_n^2 - u_n)$.

   En déduire $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \lambda(1 - u_n)$, où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1}{2}(2 - u_0^2 - u_0)$.

d. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq 1 - u_n \leq \lambda^n (1 - u_0)$.

En déduire que la suite u converge vers 1.

Deuxième cas : on suppose que $a = u_0$ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0 [$.

a. On considère la suite $v = -u$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $f(v_n) = v_{n+1}$. On utilisera le fait que la fonction f est impaire.

b. En utilisant la question 1, démontrer que v est convergente.

En déduire que u est convergente.

3. Expliciter la fonction L.

D. Non continuité par rapport à un paramètre d'une limite de suite définie par récurrence

On note φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $\begin{cases} \varphi(x) = x \text{ si } x \in [0 ; 1 [\\ \varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x+1) \text{ si } x \in [1 ; +\infty [\end{cases}$.

Pour tout nombre réel λ de l'intervalle $] 0 ; 2 [$, on considère la fonction f_λ définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f_\lambda(x) = \lambda\varphi(x)$. On a donc $\begin{cases} f_\lambda(x) = \lambda x \text{ si } x \in [0 ; 1 [\\ f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{2}(x+1) \text{ si } x \in [1 ; +\infty [\end{cases}$.

f_λ permet de définir la suite positive u de premier terme $u_0 = 0{,}8$, vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$, pour tout entier naturel n.

Dans le cas où la suite u admet une limite, celle-ci dépend de λ puisque la fonction f_λ et la suite u dépendent de λ ; on la notera $L(\lambda)$. On s'intéresse à la fonction L .

1. Étude graphique et conjecture.

a. Démontrer la continuité de la fonction φ sur son ensemble de définition.

En déduire la continuité de f_λ, λ étant un élément quelconque de $] 0 ; 2 [$.

b. En prenant un repère orthonormal et une unité graphique de $4\,\text{cm}$, tracer, sur l'intervalle $[0 ; 4]$, sur trois graphiques différents, les courbes respectives des fonctions f_λ pour $\lambda = 1$, $\lambda = 0{,}5$, $\lambda = 1{,}5$.

c. Dans chacun des cas précédents, en utilisant la droite d'équation $y = x$, construire les premiers termes de la suite u, puis conjecturer la limite de cette suite, c'est-à-dire la valeur de $L(\lambda)$.

d. Représenter la fonction L sur $] 0 ; 2 [$ et étudier la continuité de L sur cet intervalle.

2. Détermination de $L(\lambda)$ pour $0 < \lambda \leq 1$.

On suppose que λ appartient à l'intervalle $] 0 ; 1]$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est dans l'intervalle $[0 ; 1 [$.

b. Déterminer la nature de la suite u, puis l'expression de son terme général.

c. En déduire la valeur de $L(\lambda)$, suivant les valeurs de λ élément de $] 0 ; 1]$.

3. Détermination de $L(\lambda)$ pour $1 < \lambda < 2$

On suppose que λ appartient à l'intervalle $]\,1\,;\,2\,[$.

a. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

> INDICATION
> On raisonnera par l'absurde, en montrant que, si u_n est dans $[\,0\,;\,1\,]$ pour tout entier naturel n, alors la suite u tend vers $+\infty$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \geq n_0$, u_k est dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α, dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.
Donner l'expression de α en fonction de λ.

d. Démontrer que la suite $(u_k - \alpha)$, avec $k \geq n_0$, est géométrique, puis déterminer sa limite.

e. En déduire la valeur de $L(\lambda)$, pour λ élément de $]\,1\,;\,2\,[$.

E. Non continuité d'une dérivée, ou d'une dérivée seconde.

On admettra ici que les fonctions $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admettent pas de limite en zéro.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

   Démontrer que f est continue et dérivable en 0, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

   Démontrer que g et que g' sont continues et dérivables en 0, mais que g'' n'est pas continue en 0.