MEILLEURE APPROXIMATION AFFINE

Objectif	*Pour une fonction f dérivable en x_0, démontrer que la fonction affine tangente en x_0 est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0*
Outils	*Définition du nombre dérivé et de la tangente.*

Il s'agit de déterminer la meilleure approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point.

A. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle D, x_0 un réel de D et C la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$.
On appelle approximation affine de la fonction f en x_0 toute fonction affine g telle que $g(x_0) = f(x_0)$.

Soit g_1 et g_2 deux approximations affines de la fonction f en x_0.

On dit que g_1 est « meilleure » que g_2 s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que, pour tout x de $\mathrm{I} \cap \mathrm{D}$, on ait $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$ (c'est-à-dire lorsque g_1 est plus « proche » de f que g_2 sur I)[1].

Si f est dérivable en x_0, on appelle fonction affine tangente à f en x_0 la fonction affine dont la représentation graphique dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

B. Exemple 1

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^2 + x$.

1. Déterminer la fonction affine tangente à f en 0. On note g_1 cette fonction.

2. Soit g_2 la fonction affine définie par $g_2(x) = \frac{3}{2}x$.

   Démontrer que, pour tout réel x, on a : $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)| \Leftrightarrow |x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

   En déduire que cette inégalité est vérifiée pour tout x de l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$. Conclure.

3. Soit g_3 la fonction affine définie par : $g_3(x) = ax$ où a est un réel distinct de 1.

   Démontrer que, pour tout réel x, on a : $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_3(x)| \Leftrightarrow |x| \leq |x + 1 - a|$

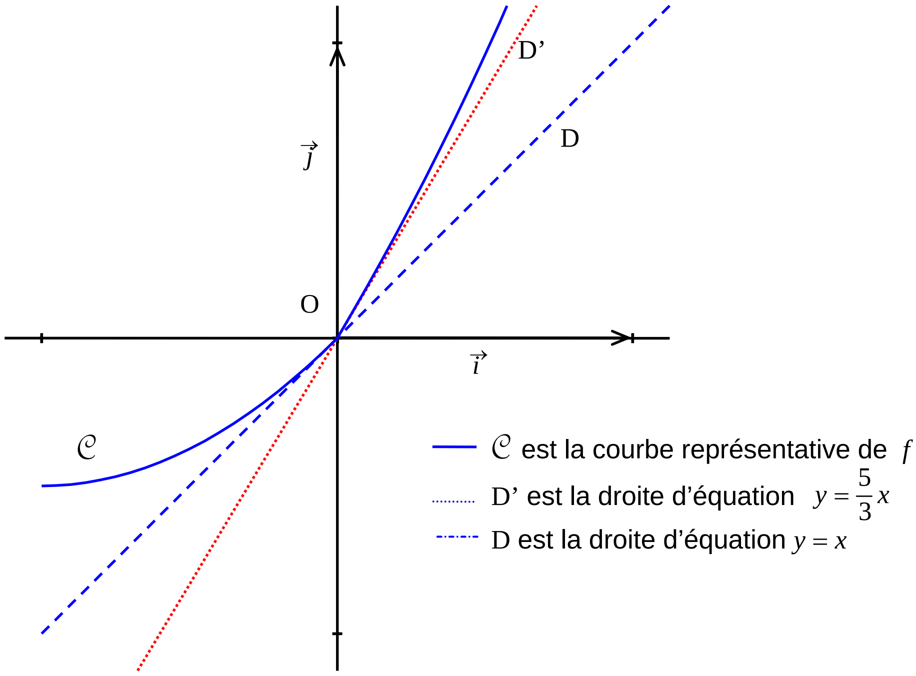
[1] On peut alors démontrer aisément qu'il existe un intervalle ouvert J centré en x_0 où la même inégalité est valable. Si I = **R**, on peut prendre J = **R**. Si I ≠ **R**, on peut prendre pour J l'intervalle centré en x_0 ayant pour rayon la distance de x_0 à la borne la plus proche de x_0. Alors J est inclus dans I et l'inégalité, vraie sur I, est donc vraie sur J.

En déduire que la première inégalité est vérifiée pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\left|\frac{a-1}{2}\right| ; \left|\frac{a-1}{2}\right|\right[$.

(On distinguera les cas : $a > 1$ et $a < 1$).

En déduire que g_1 est la meilleure approximation affine de f en 0

4. La représentation graphique suivante est-elle correcte ?



C. Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer la fonction affine tangente à f en 1. On note g_1 cette fonction.

2. Soit g_2 une approximation affine de f en 1, différente de g_1.

   Démontrer qu'il existe un réel a, différent de -1, tel que $g(x) = ax - a + 1$.

3. Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, différent de 1, les affirmations suivantes sont équivalentes :

   $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$

   $|1 + x^2 - 2x| \leq |1 - ax^2 + (a-1)x|$

   $|x - 1| \leq |-ax - 1|$ (on pourra multiplier les deux membres de cette deuxième inégalité par $|x-1|$, pour montrer qu'elle est équivalente à la première)

   $(x-1)^2 \leq (-ax-1)^2$

   $0 \leq (a+1)[(a-1)x + 2]$

4. En déduire que l'inégalité $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x) - g_2(x)|$ est vérifiée :

   – pour x élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ si $a > 1$,

   – pour x élément de l'intervalle $\left]0 ; \frac{2}{(1-a)}\right[$ si $-1 < a < 1$,

– pour x élément de l'intervalle $\left]\frac{2}{(1-a)}\,;+\infty\right[$ si $a<-1$.

Vérifier que dans les trois cas l'intervalle considéré contient le nombre 1.

5. En déduire que g_1 est la meilleure approximation affine de f en 1.

D. Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Déterminer la fonction affine tangente à f en 1. On note g_1 cette fonction.

2. Soit g_2 une approximation affine de f en 1, différente de g_1.

   Démontrer qu'il existe un réel a différent de $\frac{1}{2}$ tel que $g_2(x) = ax - a + 1$.

3. Démontrer que, pour tout réel x de $[\,0\,;+\infty\,[$, différent de 1, les affirmations suivantes sont équivalentes :

   $|f(x)-g_1(x)| \le |f(x)-g_2(x)|$

   $\left|\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right| \le \left|a\sqrt{x}+a-1\right|$ (on pourra multiplier les deux membres de cette deuxième inégalité par $\left|\sqrt{x}-1\right|$ pour montrer qu'elle est équivalente à la première)

   $\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 \le \left(a\sqrt{x}+a-1\right)^2$

   $0 \le \left(a-\frac{1}{2}\right)\left[(2a+1)\sqrt{x}+2a-3\right]$

4. L'intervalle I est défini comme étant égal à :

   $]\,0\,;+\infty\,[$ si $a \ge \frac{3}{2}$ ou si $a \le -\frac{1}{2}$

   $\left]\left(\frac{3-2a}{2a+1}\right)^2 ;+\infty\right[$, si $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$

   $\left]0\,;\left(\frac{3-2a}{2a+1}\right)^2\right[$, si $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

   a. Démontrer dans chaque cas que, pour tout x élément de I, on a : $|f(x)-g_1(x)| \le |f(x)-g_2(x)|$.

   b. Démontrer que dans chaque cas I contient 1.

5. En déduire que g_1 est la meilleure approximation affine de f en 1.

DOCUMENT PROFESSEUR

Théorème

f étant une fonction numérique dérivable en x_0, la fonction affine tangente à f en x_0 , Φ_{x_0} , est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0.

En d'autres termes, pour toute fonction affine Ψ telle que $\Psi(x_0) = f(x_0)$, il existe un intervalle I_Ψ ouvert, non vide, centré en x_0 , tel que, pour tout réel x élément de I_Ψ , on ait : $\left| f(x) - \Phi_{x_0}(x) \right| \leq \left| f(x) - \Psi(x) \right|$.

Démonstration

La fonction affine tangente à f en x_0 est définie par : $\Phi_{x_0}(x) = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0)$.

Une fonction affine Ψ telle que $\Psi(x_0) = f(x_0)$ est définie par $\Psi(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$, où a est un réel.

<u>Premier cas</u> : $a = f\,'(x_0)$

La conclusion est vérifiée banalement.

<u>Deuxième cas</u> : $a \neq f\,'(x_0)$

On considère les fonctions numériques g et h définies par :

$$h(x) = \frac{f(x) - \Phi_{x_0}(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f\,'(x_0)\,,$$

$$g(x) = \frac{f(x) - \Psi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \ ;$$

On a :

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f\,'(x_0)$, d'où $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f\,'(x_0) - a$.

et par suite, $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\left| g(x) \right| - \left| h(x) \right| \right) = \left| f\,'(x_0) - a \right|$.

Or, $f\,'(x_0) - a \neq 0$, d'où $|\, f\,'(x_0) - a \,| > 0$ et par conséquent il existe un intervalle I_Ψ ouvert, non vide, centré en x_0 , et inclus dans l'ensemble de définition de f, tel que, pour tout réel x élément de I_Ψ et distinct de x_0 , on ait :

$\left| g(x) \right| - \left| h(x) \right| > 0,$

soit $\left| \dfrac{f(x) - \Psi(x)}{x - x_0} \right| > \left| \dfrac{f(x) - \Phi_{x_0}(x)}{x - x_0} \right|$, soit $\left| f(x) - \Psi(x) \right| > \left| f(x) - \Phi_{x_0}(x) \right|$;

de plus $\left| f(x_0) - \Psi(x_0) \right| > \left| f(x_0) - \Phi_{x_0}(x_0) \right| = 0$;

En conclusion :

Pour tout réel x élément de I_Ψ on a : $\left| f(x) - \psi(x) \right| \geq \left| f(x) - \Phi_{x_0}(x) \right|$.