DÉRIVONS EN VITESSE

Objectif	*Comparer deux approximations du nombre dérivé d'une fonction numérique en un point, l'une issue de la définition mathématique usuelle, l'autre utilisée par les calculatrices.*
Outils	*Nombre dérivé et interprétation graphique.*

Cette séquence a été publiée dans la brochure
« Espace modules - Mathématiques première S »
CRDP d'Aquitaine - 1996

Lorsque h est assez petit, les nombres $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ et $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0-h)}{2h}$ sont des valeurs approchées du nombre dérivé de la fonction f en t_0. Le deuxième, qui semble donner une meilleure approximation que le premier, est utilisé par les calculatrices. On se propose ici de comparer ces nombres et d'étudier la légitimité de ces approximations.

Un point M se déplace sur une droite. Sa position à l'instant t est caractérisée par son abscisse dans le repère (O, I) : $x = f(t)$ où f est une fonction dérivable en t_0.

Par définition, on appelle vitesse instantanée de M à l'instant t_0 le nombre dérivé de f en t_0 : $f'(t_0)$.

Dans la pratique, on utilise deux valeurs approchées de cette vitesse :

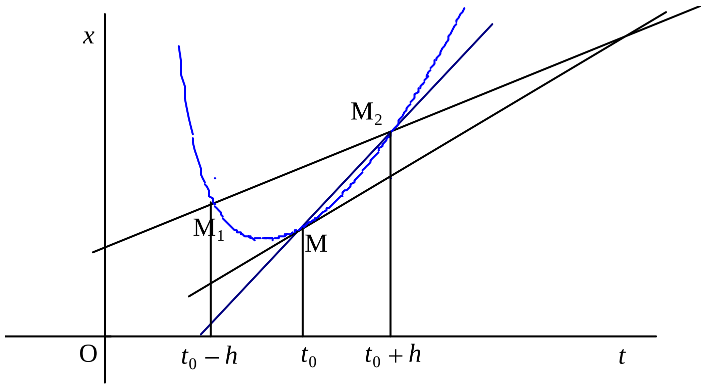
$$V(t_0\,;h) = \frac{f(t_0+h)-f(t_0-h)}{2h} \qquad \text{pour } h \text{ « assez petit »,}$$

$$W(t_0\,;h) = \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \qquad \text{pour } h \text{ « assez petit ».}$$

On se propose de comparer ces deux approximations.

À cet effet, on introduit les nombres $\varphi(t_0\,;h) = V(t_0\,;h) - f'(t_0)$ et $\mu(t_0\,;h) = W(t_0\,;h) - f'(t_0)$.

REMARQUE
$V(t_0\,;h)$ est le coefficient directeur de la droite (M_1M_2).
$W(t_0\,;h)$ est le coefficient directeur de la droite (MM_2).



A. Légitimité de l'approximation de $f'(t_0)$ par $V(t_0\,;h)$

Soit f une fonction dérivable en t_0 et $f'(t_0)$ le nombre dérivé de f en ce point.

1. Démontrer que $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h} = f'(t_0)$.
2. Vérifier que $V(t_0\,;h) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}+\dfrac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h}\right]$ et en déduire $\lim_{h\to 0} V(t_0\,;h) = f'(t_0)$.

B. Comparaison des approximations dans des cas particuliers

1. Mouvement uniforme : $f(t) = at+b$ $(a \neq 0)$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$ et $\mu(t_0\,;h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.
   c. Conclure.
2. Mouvement uniformément accéléré : $f(t) = at^2+bt+c$ $(a \neq 0)$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$ et $\mu(t_0\,;h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.
   c. Conclure.
3. Mouvement de loi horaire $f(t) = t^3$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$ et $\mu(t_0\,;h)$.
   c. On se place à l'instant $t_0 = 1$; expliciter $\varphi(1\,;h)$ et $\mu(1\,;h)$.
   Démontrer que, pour tout h élément de $]-0{,}1\,;0{,}1[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(1\,;h)}{\mu(1\,;h)}\right| < 1$. Conclure.
4. Mouvement de loi horaire $f(t) = \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.
   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$, $\mu(t_0\,;h)$ et $\dfrac{\varphi(t_0\,;h)}{\mu(t_0\,;h)}$.
   c. Déterminer un nombre réel strictement positif ε tel que, pour tout nombre réel h élément de l'intervalle $]-\varepsilon\,;+\varepsilon[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(t_0\,;h)}{\mu(t_0\,;h)}\right| < 1$. Conclure.

C. Rôle de l'hypothèse de dérivabilité

Les deux approximations du nombre dérivé de f en t_0 supposent évidemment la dérivabilité de f en t_0 (passée peut-être inaperçue !).

Soit $f(t) = |t|$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

Calculer $V(0\,;h)$ et $W(0\,;h)$. Donner les valeurs exactes de $V(0\,;10^{-6})$ et de $W(0\,;10^{-6})$. Conclure.

D. La machine dicte sa loi

De nombreuses calculatrices donnent le nombre dérivé d'une fonction en un point t_0, mais elles affichent en fait la valeur de $V(t_0\,;h)$ pour h « très petit ». Selon les calculatrices, le paramètre h peut ou doit être défini par l'utilisateur (voir mode d'emploi).

Remplir le tableau ci-contre en indiquant le nombre dérivé de la fonction f en t_0 affiché par la calculatrice.

Certaines réponses sont aberrantes. Pourquoi ?

$f(t)$ \ t_0	-5	-2	0	2	5
t^2					
t^3					
$\frac{1}{t}$					
$\lvert t\rvert$					

E. Sujet d'étude

À l'instant $t = 0$, on lâche une balle, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 5 m.

On suppose que, durant sa chute, la distance $f(t)$ entre la balle et le sol est définie par $f(t) = -5t^2 + 5$, que la balle touche le sol à l'instant $t = 1$ puis rebondit.

On suppose alors que, entre le premier et le second rebond (à l'instant $t = 2{,}5$), la distance entre la balle et le sol est définie par $f(t) = -5t^2 + 17{,}5t - 12{,}5$.

En résumé $\begin{cases} f(t) = -5t^2 + 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ f(t) = -5t^2 + 17{,}5t - 12{,}5 & \text{si } 1 \leq t \leq 2{,}5 \end{cases}$

1. À l'instant $t = 1$, on considère :

$$V(1\,;h) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \quad \text{et} \quad W(1\,;h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{où} \quad -10^{-1} < h < 10^{-1}.$$

   a. Calculer $V(1\,;h)$ et $W(1\,;h)$ en distinguant $h > 0$ et $h < 0$.

   b. Donner les valeurs exactes de $V(1\,;10^{-6})$, $V(1\,;-10^{-6})$, $W(1\,;10^{-6})$ et $W(1\,;-10^{-6})$.

   c. Peut-on utiliser ces résultats pour émettre des conjectures sur la vitesse de la balle à l'instant $t = 1$?

2. a. Montrer que $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers zéro par valeurs négatives et lorsque h tend vers zéro par valeurs positives.

   Ces limites sont respectivement appelées nombre dérivé de f à gauche en 1 et nombre dérivé de f à droite en 1. On les note $f_g'(1)$ et $f_d'(1)$.

   La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

   b. Calculer $\frac{1}{2}(f_g'(1) + f_d'(1))$. Que constate-t-on ?

3. Plus généralement, soit une fonction numérique f de la variable réelle t, définie sur un intervalle ouvert I, admettant, en un point t_0 de l'intervalle I, un nombre dérivé à gauche $f_g'(t_0)$ et un nombre dérivé à droite $f_d'(t_0)$.

   Démontrer que $V(t_0\,;h)$ a pour limite $\frac{1}{2}(f_g'(t_0) + f_d'(t_0))$ lorsque h tend vers zéro.

DOCUMENT PROFESSEUR

NOTE TECHNIQUE SUR L'UTILISATION DE Géoplan

1. Création de l'imagiciel

L'imagiciel a été créé avec GÉOPLAN POUR WINDOWS.

Charger ou exécuter (suivant configuration) le fichier Géoplan

Voici la liste des objets à construire et des actions à effectuer pour créer cet imagiciel.

Description	Objets à créer
1. Afficher le repère de base Roxy	
2. Définir un point libre m et ses coordonnées (m est la « poignée » qui permettra de déplacer le segment [ab] (voir dessin page suivante) et le point M de la courbe). L'abscisse de m représente la variable t du problème.	`m` point libre `xm` abscisse de `m` (repère Roxy) `ym` ordonnée de `m` (repère Roxy)
3. Créer une constante définissant la demi-longueur du segment [ab]. Cette constante représente la variation maximale de la variable h utilisée dans le problème.	`d = 3`
4. Créer le segment [ab].	a point de coordonnées `(xm - d , ym)` b point de coordonnées `(xm + d , ym)` Segment [ab]

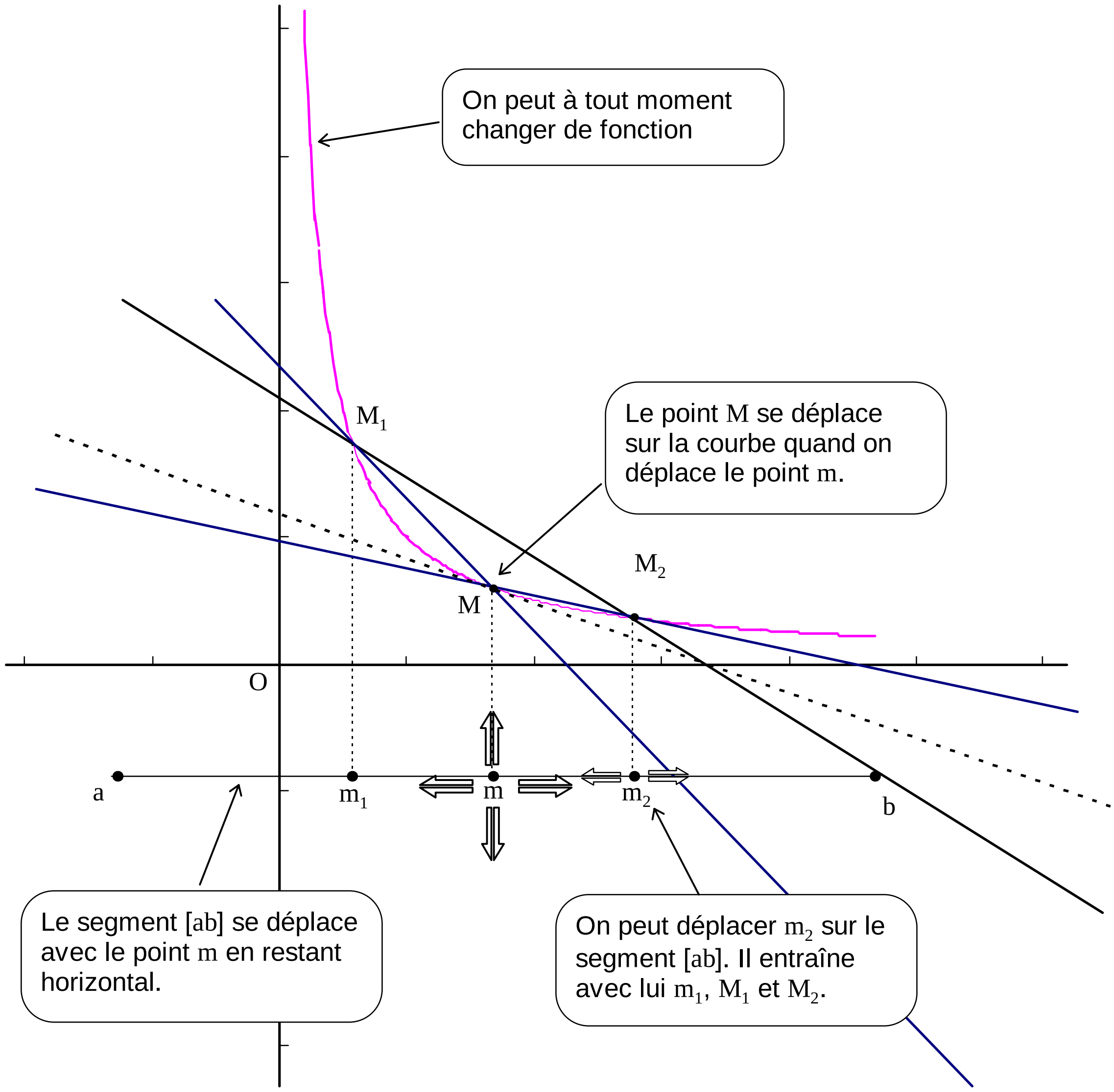
5. Créer un point libre sur le segment [ab] et son symétrique par rapport à m. Ce point est la deuxième « poignée » qui définit le nombre h du problème (différence entre l'abscisse de ce point et l'abscisse de m).	`m2` point libre sur le segment [ab]
	`xm2` abscisse de `m2`
	`h = xm2 - xm`
	`xm1 = xm - h`
	`m1` point de coordonnées `(xm1 , ym)`

6. Définir la fonction f (loi horaire du mouvement), sa dérivée et leurs courbes représentatives.	`f` fonction : $t \mapsto \frac{1}{t}$ `g` fonction : $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ `C1` courbe définie par `Y = f(T)`, `T` décrivant `[xm - d , xm + d]` (300 points, repère Roxy) `C2` courbe définie par `Y = g(T)`, `T` décrivant `[xm - d , xm + d]` (300 points, repère Roxy)

7. Placer les points M (instant t), M_1 (instant $t-h$), M_2 (instant $t+h$) sur la courbe représentant f.	`M` point de coordonnées `(xm , f(xm))`
	`M1` point de coordonnées `(xm1 , f(xm1))`
	`M2` point de coordonnées `(xm2 , f(xm2))`

8. Tracer les droites MM_1, MM_2, M_1M_2 et la tangente en M à la courbe.	Droite (`M1M2`) ; droite (`MM2`) ; droite (`MM1`) `D` droite passant par `M` et de coefficient directeur `g(xm)`

2. Utilisation



On peut agir sur t (donc sur M) et sur h (donc sur M_1 et M_2) à l'aide des « poignées » m et m_2.

L'imagiciel peut faire apparaître les valeurs de $f'(t)$ et, au choix, celles de $V(t\,;h)$ et $W(t\,;h)$ ou celles de $P(t\,;h)$ et $M(t\,;h)$.

Le dessin se modifie instantanément lorsqu'on définit une nouvelle fonction et sa dérivée.

On peut zoomer sur M.

NOTE TECHNIQUE SUR L'UTILISATION DE Derive

Pour calculer rapidement les valeurs approchées obtenues en utilisant l'une ou l'autre des formules, on peut utiliser un logiciel de calcul formel. Avec DERIVE cela donne :

① Entrer une fonction « à blanc » pour initialiser la variable F.

```
F(t):=
```

② Définir le nombre dérivé de la fonction F en t.

On utilise la définition du nombre dérivé en un point. DERIVE n'acceptant pas f' comme nom de fonction, on appelle cette fonction DF : $DF(t) := \lim\limits_{e \to 0} \dfrac{F(t+e)-F(t)}{e}$. On utilise ici e pour éviter tout conflit ultérieur avec l'emploi de h.

```
DF(t):=LIM((F(t+e)-F(t))/e,e,0)
```

③ Définir la fonction V : $V(t,h) = \dfrac{F(t+h)-F(t-h)}{2h}$

```
V(t,h):=(F(t+h)-F(t-h))/(2*h)
```

④ Définir la fonction W : $W(t,h) = \dfrac{F(t+h)-F(t)}{h}$

```
W(t,h):=(F(t+h)-F(t))/h
```

⑤ Définir une fonction R permettant d'obtenir la valeur du nombre dérivé puis les valeurs approchées obtenues par V et par W :

```
R(t,h):=["f' : ",DF(x),"V : ",V(x,h),"W : ",W(x,h)]
```

⑥ Entrer la fonction F :

```
F(t):=a*t+b
```

⑦ Formuler la requête :

```
R(t,h)
```

⑧ Simplifier ce résultat (touche **S**). On obtient alors :

```
["f' : ",a,"V : ",a,"W : ",a]
```

⑨ Entrer une nouvelle fonction F :

```
F(t):=a*t^2+b*t+c
```

etc.

Sur la TI92 on peut formuler les requêtes de manière semblable.