LES TANGENTES D'ABORD

Objectif	*Déterminer une courbe à partir de ses tangentes.*
Outils	*Courbes paramétrées. Vecteur dérivé. Dérivée de la fonction composée..*

En pliant d'une certaine façon une feuille de papier on obtient les tangentes à une courbe qu'il s'agit de déterminer.

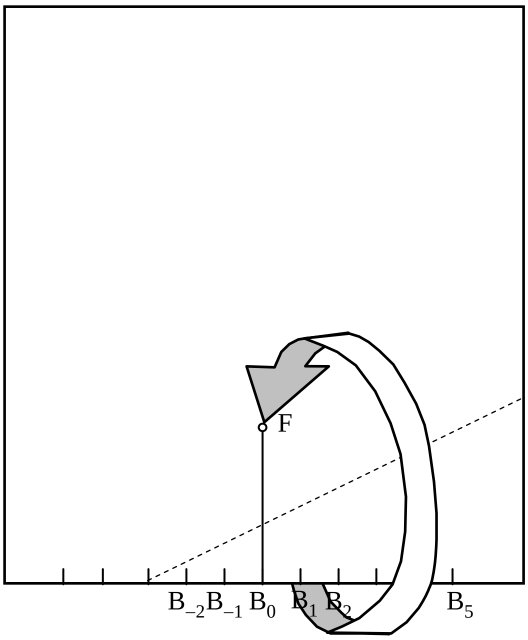
Sur une feuille de papier de format A_4 , on choisit un des deux petits côtés que l'on place vers soi.

On appelle B_0 le milieu de ce petit côté. On note F le point de la feuille tel que (B_0F) soit parallèle aux grands côtés de la feuille, et que $[B_0F]$ mesure 4 cm.

À droite de B_0, en partant de B_0, on gradue le petit côté de la feuille de centimètre en centimètre par les points B_1, B_2, ..., B_{10}. On fait de même à gauche de B_0, en partant de B_0 : on place les points B_{-1}, B_{-2}, … , B_{-10}.

Pour chaque entier i appartenant à l'ensemble $\{ -10, -9, \dots , 0, 1, \dots, 10 \}$, on replie la feuille de manière à faire coïncider le point B_i et le point F puis on repasse au crayon chaque ligne de pliage. La droite portée par cette ligne de pliage sera appelée Δ_i.

À l'instar des ficelles tendues, en vogue dans les années 70, les droites Δ_i semblent délimiter une courbe $\mathcal{C}$ qu'il s'agit de déterminer.



Le plan de la feuille est supposé désormais illimité. On se place dans le repère orthonormal direct $\left(\mathrm{B}_0\ ;\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}\ ;\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{F}}\right)$. Pour tout réel t, on note B_t le point de coordonnées $(t\ ;0)$ et Δ_t la médiatrice du segment $[\mathrm{FB}_t]$.

1. Déterminer une équation de la droite Δ_t.

2. On suppose qu'il existe une courbe $\mathcal{C}$ admettant pour tangentes toutes les droites Δ_t. et que $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur 3.

   Pour tout réel t, on note M_t le point de contact entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ_t et $(\,x\,(t)\ ;\ y\,(t)\,)$ les coordonnées du point M_t. Celles-ci dépendent du paramètre t et on suppose que les fonctions $t \mapsto x\,(t)$ et $t \mapsto y\,(t)$ sont dérivables sur 3.

   a. Démontrer que, pour tout réel t, $y'(t) = x'(t)(f' \circ x)(t) = x'(t)\,f'(x(t))$.

   b. Démontrer que, pour toute valeur de t telle que $x'(t)$ ne soit pas nul, le vecteur $\vec{v}_t\,(x'(t)\ ;\ y'(t))$ est un vecteur directeur de Δ_t.

   c. En déduire que, pour tout réel t tel que $x'(t) \neq 0$, on a : $t\,x'(t) - 4\,y'(t) = 0$ (1)

   d. Justifier que, pour tout réel t, on a : $t\,x(t) - 4y(t) - \frac{t^2}{2} + 8 = 0$ (2)

      En déduire que, pour tout réel t on a : $x(t) + tx'(t) - 4y'(t) - t = 0$ (3)

   e. Utiliser alors (1) et (3) pour exprimer $x\,(t)$ et $y\,(t)$ en fonction de t et démontrer que la fonction f ne peut être que la fonction définie sur 3 par $f(x) = \frac{x^2}{8} + 2$.

3. On pose $f(x) = \frac{x^2}{8} + 2$.

   Démontrer que les tangentes à la courbe représentative de f sont les droites Δ_t avec t décrivant **R**.