MONOTONE À EN PRENDRE LA TANGENTE

Objectif	*Mettre en évidence la relation qu'il y a entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.*
Outils	*Dérivées*

L'objet de cette activité est de mettre en évidence la relation entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.

Dans toute cette activité, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$. Pour un élément x quelconque de I, on nomme M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et $\mathrm{T_M}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M.

A. De la monotonie de la dérivée à la position relative courbe / tangentes

1. Exemples

Exemple 1

On prend pour fonction f la fonction $x \mapsto e^x$ et pour intervalle I l'ensemble $\mathbf{R}$.

a. Quel est le sens de variation de la dérivée f ' ?

b. Écrire l'équation réduite $y = k(x)$ de la tangente $(\mathrm{T}_{\mathrm{M}_0})$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_0 d'abscisse x_0.

c. Étudier le signe de la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - k(x)$ (si nécessaire on pourra étudier d'abord le sens de variation de φ).

d. En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathrm{T}_{\mathrm{M}_0}$ pour des abscisses éléments de I.

Exemple 2

On prend pour fonction f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et pour intervalle I l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.

Traiter alors les questions a, b, c, d précédentes avec x_0 élément quelconque de I.

Exemple 3

On prend pour fonction f la fonction $x \mapsto \tan x$ et pour intervalle I l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Traiter alors les questions a, b, c, d précédentes avec $x_0 = 0$.

2. Théorèmes

a. On prend pour fonction f une fonction dont la dérivée f ' est croissante sur I.
Traiter alors les questions b, c, d telles qu'elles sont formulées dans la question 1.
Énoncer le théorème démontré (théorème 1).

b. On prend pour fonction f une fonction dont la dérivée f' est décroissante sur I.

Formuler un théorème analogue au théorème 1 précédent (théorème 2).

Démontrer ce théorème (on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$ pour tout x élément de I et lui appliquer le théorème 1 précédent).

B. Réciproques

Dans cette partie, on suppose que tout point M de $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_M.

1. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$, A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.
   a. Démontrer que le coefficient directeur de la tangente T_A est inférieur au coefficient directeur de la droite (AB), lui-même inférieur au coefficient directeur de la tangente T_B.
   b. En déduire que la fonction f' est croissante sur I.

2. Énoncer le théorème démontré (réciproque du théorème 1).
   Énoncer de manière analogue la réciproque du théorème 2.

C. Application des théorèmes directs

On dit qu'un point M_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en M_0 et si $\mathcal{C}_f$ traverse cette tangente en x_0 .

Démontrer que, si la fonction f' admet un extremum en x_0 alors M_0 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Donner des exemples de fonctions dont la courbe admet un point d'inflexion.