# LA RÉFRACTION FAIT RÉFLÉCHIR LEIBNIZ

| | |
|---|---|
| ***Objectif*** | *Faire l'étude mathématique d'un texte historique.* |
| ***Outils*** | *Dérivée. Variation de la composée.*<br>*Prolongement de la monotonie par continuité.* |

Il s'agit de résoudre le problème de la réfraction traité par Leibniz par une méthode tout à fait semblable à celle qu'il employa, mais en utilisant la dérivée plutôt que les différentielles.

## A. Présentation du problème

L'article « *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus (Nouvelle méthode pour chercher les Maximums et les Minimums, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les exposants fractionnaires et irrationnels, accompagnée du calcul original qui s'y applique*[1]*)*», publié par Leibniz en 1684, est l'un des textes fondateurs de l'Analyse.

L'auteur y présente ses fameuses différentielles. En effet le calcul infinitésimal chez Leibniz repose sur la notion plus ou moins intuitive de différentielle, plutôt que sur celle de dérivée. Leibniz introduit donc d'abord ses notations $dx$, $dy$, … encore en usage aujourd'hui, puis indique les règles de calcul à leur égard, $d\left(\frac{x}{y}\right)$ par exemple, ou $d\left(\sqrt[b]{x^a}\right)$.

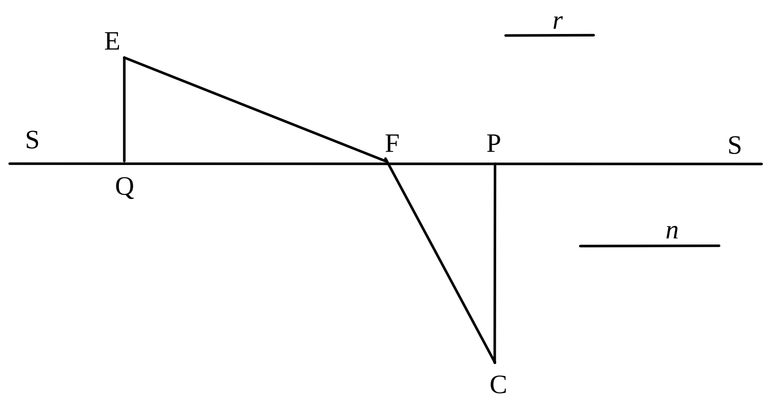
Pour finir, il présente les premières applications de ce calcul :

- détermination de la tangente quelconque à la courbe d'équation $x : y + (a + bx)(c - xx)$ : carré de $(ex + fxx) + ax\sqrt{(gg + yy)} + yy : \sqrt{(hh + lx + mxx)} = 0$ ;
- détermination de la tangente à la courbe formée des points M tels que la somme des distances de M à sept points alignés donnés soit égale à un nombre donné ;
- solution d'une équation différentielle donnée sous une forme géométrique (recherche des courbes à sous-tangente constante) ;
- détermination d'extremum appliquée à un problème important en physique, la loi de réfraction de Descartes, qui est présenté ci-dessous.

[1] Traduction Marc Parmentier (Leibniz, Naissance du Calcul Différentiel, chez Vrin)

### Texte de Leibniz

*Étant donnés deux points C et E et la droite SS dans le même plan, nous cherchons quel point F il faut prendre sur SS pour que, une fois tracés CF et EF, la somme du produit de CF par une donnée* $n$*, et du produit de EF par la constante* $r$*, soit la plus petite possible ; si SS est la frontière entre deux milieux,* $n$ *représentant la densité du côté de C, par exemple de l'eau, et* $r$ *la densité du côté de E, par exemple de l'air, nous cherchons donc le point F tel que de tous les points allant de C à E, celui passant par lui soit le plus commode. [...] Je noterai* $w$*, toutes les sommes possibles de ces deux produits, soit toutes les difficultés possibles des chemins ; nous cherchons leur minimum. Puisque les points C et E sont donnés, le seront aussi les perpendiculaires à SS, savoir CP (que je noterai* $c$*), EQ (e), enfin PQ (*$p$*). QF [...] je l'appellerai* $x$*, CF, f, et EF, g; nous aurons FP* $= p - x$*,* $f = \sqrt{cc + pp - 2px + xx}$ *soit en abrégé* $\sqrt{l}$ *et g égal à* $\sqrt{ee + xx}$ *, en abrégé* $\sqrt{m}$ *. Nous avons donc* $w = n\sqrt{l} + r\sqrt{m}$ *d'où en appliquant les règles de calcul que j'ai indiquées (puisque si* $w$ *est minimal,* $dw = 0$*) :* $0 = + ndl : 2\sqrt{l} + rdm : 2\sqrt{m}$ *; or* $dl$ *est* $-2\,dx\,(p - x)$ *et* $dm = 2x\,dx$*, il vient donc :* $n\,(p - x) : f = rx : g$*. Si on adapte ceci à la dioptrique [...], les sinus des angles d'incidence et de réfraction sont respectivement proportionnels à* $r$ *et* $n$*, densités des milieux dans lesquels ont lieu [respectivement] la réfraction et l'incidence. Il ne faut pas considérer que cette densité est déterminée à notre guise, mais par la résistance que les milieux opposent aux rayons lumineux. Nous en déduisons la démonstration d'un calcul que j'ai déjà donné dans les Acta, en exposant le principe général de l'Optique, de la Catoptrique et de la Dioptrique. Or d'autres très éminents Savants*[2] *ont dû en passer par de multiples détours pour débusquer des résultats que toute personne accoutumée au présent calcul*[3] *établira à l'avenir en trois lignes.*




### Introduction

Leibniz admet qu'entre deux points d'un plan, même situés dans deux milieux différents, la lumière emprunte toujours le trajet permettant le temps de parcours minimal. Ce principe fut d'abord énoncé par Pierre de Fermat (1601-1665)[4]. À partir de ce principe d'optique et de son nouveau calcul différentiel, Leibniz entreprend de démontrer la seconde loi de Descartes sur la diffraction, qui affirme que lorsqu'un rayon de lumière passe d'un milieu d'indice n à un milieu d'indice r, son trajet obéit à la formule: $n.\sin(a) = r.\sin(b)$, $a$ et $b$ étant respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction.

---

[2] Leibniz fait ici référence à Descartes et Fermat. Leibniz est un peu injuste envers Fermat (1601-1665), dont Leibniz reprend la démonstration, enrichie il est vrai de ses propres idées novatrices. Les calculs de Fermat n'étaient au demeurant pas si laborieux ! Leibniz plaide sa cause avec un peu d'exagération.

[3] Le "Calcul Infinitésimal", ou encore "Analyse Supérieure " de Leibniz, que l'article cité inaugure.

[4] Ce principe est donc encore appelé : "Principe de Fermat".

## B. Problème

Soit deux points C et E situés dans des milieux d'indices respectifs $n$ et $r$. (SS') est la droite séparant les milieux, P et Q les projetés orthogonaux respectifs de C et E sur (SS'), F est le point de [PQ] tel que $\mathrm{QF} = x$. On pose $\mathrm{QE} = e$, $\mathrm{CP} = c$, $\mathrm{PQ} = p$.

On rappelle que dans un milieu d'indice $n$, la vitesse de la lumière est $\dfrac{c_0}{n}$, $c_0$ étant la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Calculer en fonction de $x$ le temps mis par la lumière pour parcourir le trajet CFE.

   On note $T(x)$ ce temps, ce qui définit une fonction $T$ sur l'intervalle $[\,0\,;\,p\,]$.

2. Calculer $T'(x)$.

3. On note $\alpha = \widehat{\mathrm{FCP}}$ et $\beta = \widehat{\mathrm{FEQ}}$. Démontrer que : $T'(x) = \dfrac{1}{c_0} \cdot \left[r\sin(\beta) - n\sin(\alpha)\right]$.

   En déduire que, **s'il existe un trajet optimal**, il est obtenu lorsque : $n.\sin(\alpha) = r.\sin(\beta)$. Ce qui démontre bien la seconde loi de Descartes.

   Leibniz, dont la démonstration était essentiellement celle que nous venons de faire note non sans fierté : « *Or d'autres très éminents Savants ont dû en passer par de multiples détours pour débusquer des résultats que toute personne accoutumée au présent calcul établira à l'avenir en trois lignes.* »

   Pensez vous être déjà une de ces personnes « *accoutumées au calcul infinitésimal* » et bon disciple de Leibniz ?

4. Leibniz ne se posait pas la question de l'existence de ce trajet optimal, qui pour lui était une évidence physique. Il est possible cependant de prouver l'existence d'un minimum de la fonction $T$.

   a. Démontrer que, pour tout $x \in\, ]\,0\,;\,p\,[$, $T'(x) = \dfrac{1}{c_0}\left[r\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{e^2}{x^2}}} - n\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{c^2}{(p-x)^2}}}\right]$

   b. En déduire, sans nouveau calcul de dérivée, que la fonction $T'$ est croissante sur $]\,0\,;\,p\,[$, puis sur $[\,0\,;\,p\,]$. Calculer $T'(0)$ et $T'(p)$. Conclure.

## C. Récréation. Comme Leibniz ?

Voici sur le même sujet et avec les mêmes notations un raisonnement que l'on pourrait être tenté de tenir.

On note $v_1$ la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice $n$, et $v_2$ la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice $r$. Le temps mis pour parcourir [CF] est $t_1 = \dfrac{\mathrm{CF}}{v_1}$ ; le temps mis pour parcourir [FE] est $t_2 = \dfrac{\mathrm{FE}}{v_2}$. Le temps total de parcours est $t_1 + t_2$.

Par ailleurs : $\sin(\alpha) = \dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{CF}}$, d'où $\mathrm{CF} = \dfrac{p-x}{\sin(\alpha)}$ ; $\sin(\beta) = \dfrac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{FE}}$, d'où $\mathrm{FE} = \dfrac{x}{\sin(\beta)}$

Le temps total de parcours est donc $T(x) = \dfrac{p-x}{v_1 \sin\alpha} + \dfrac{x}{v_2 \sin\beta}$.

Le minimum est atteint pour la valeur de $x$ qui annule la dérivée.

Or $T'(x) = \dfrac{-1}{v_1 \sin\alpha} + \dfrac{1}{v_2 \sin\beta}$ et $T'(x) = 0$ si et seulement si $v_1\sin(\alpha) = v_2\sin(\beta)$.

Conclusion : le trajet de la lumière vérifie la relation remarquable $v_1\sin(\alpha) = v_2\sin(\beta)$.

Arrive-t-on à la même conclusion que Leibniz ?

Quel est le raisonnement correct ? Pourquoi ?