ZÉROS DE LA DÉRIVÉE

Objectif	*Rechercher des conditions pour une monotonie stricte.*
Outils	*Nombre dérivé.*

À quelles conditions une fonction f, dérivable sur un intervalle I, est-elle strictement monotone sur cet intervalle ?

A. Conditions de monotonie sur un intervalle pour une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout x_0 de I on a : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1. Supposons que f soit constante sur I.

   Alors, pour tout x de I, avec $x \neq x_0$, on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ et donc $f'(x_0) = 0$.

   Supposons que f soit croissante sur I.

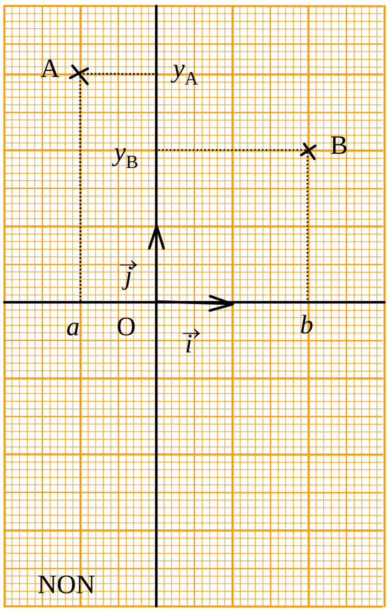
   Alors, pour tout x de I, avec $x \neq x_0$, on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ et donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ d'où $f'(x_0) \geq 0$

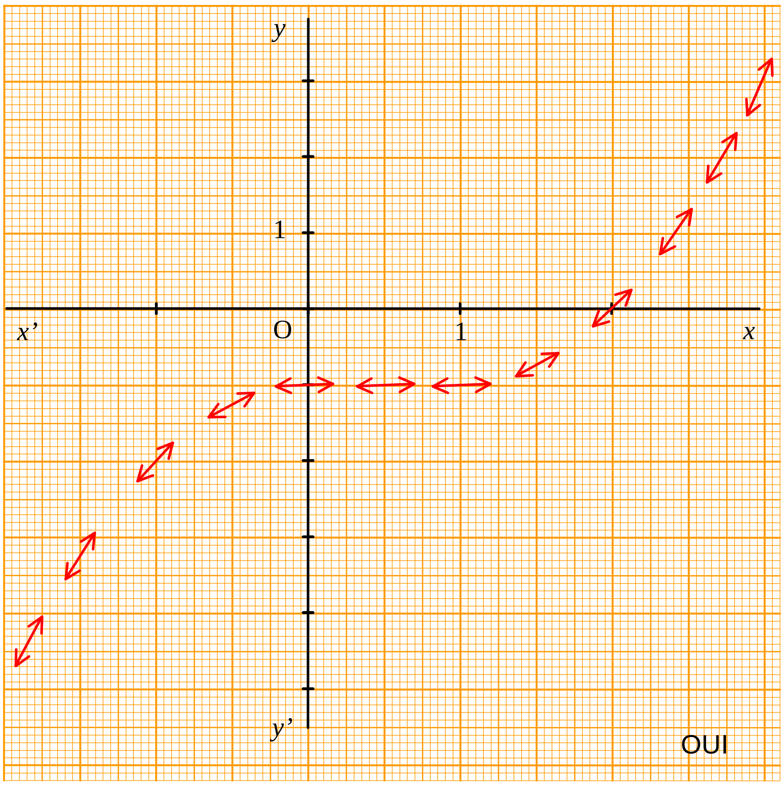
2. Réfléchissons aux réciproques à l'aide d'un graphique.

   Supposons que f soit telle que, pour tout réel x de I, on ait : $f'(x) \geq 0$. Notons Γ sa courbe représentative dans un repère.

   Supposons que f ne soit pas croissante sur I. Il existe donc deux réels a et b de I tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit A et B les points de Γ d'abscisses respectives a et b. On a donc $y_\mathrm{A} > y_\mathrm{B}$.

   Parait-il possible de tracer entre A et B la courbe représentative d'une fonction f vérifiant ces hypothèses ?





Nous admettrons la réciproque.
Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME 1
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est constante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, on $f'(x) = 0$. (1a)
- f est croissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, on $f'(x) \geq 0$. (1b)
- f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, on $f'(x) \leq 0$. (1c)

B. Conditions de stricte monotonie sur un intervalle pour une fonction dérivable

1. Recherche de conditions suffisantes : combien de zéros pour la dérivée ?

Exemple 1. Aucun zéro.

Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^3 + x$.

- f_1 est la somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$ strictement croissantes sur $\mathbf{R}$

  f_1 est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

- f_1 étant une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour tout réel x : $f_1'(x) = 3x^2 + 1$.

  Donc $f_1'(x) > 0$ pour tout réel x.

Exemple 2. Un zéro.

Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_2(x) = (1 - x)^3$

f_2 est la composée de la fonction $x \mapsto 1 - x$ par la fonction $x \mapsto x^3$.

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto 1-x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R} \\ x \mapsto x^3 \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R} \end{array}\right\} \text{ donc } f_2 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto 1-x \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \\ x \mapsto x^3 \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \end{array}\right\} \text{ donc } f_2 \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \text{ et pour tout réel } x \text{ on a : } f_2'(x) = -3(1-x)^2.$$

$f_2'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ et, pour tout réel x différent de 1, $f_2'(x) > 0$.

Exemple 3. Deux zéros.

Soit f_3 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_3(x) = \cos(x)$.

- la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$ (résultat du cours) ;
- la fonction cosinus est dérivable sur $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$ (résultat du cours).

  Pour tout réel x de $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$ on a $f_3'(x) = -\sin(x)$.

  $f_3'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \pi$ et pour tout réel x de $]\ 0\ ;\ \pi\ [$ on a : $f_3'(x) < 0$.

f étant une fonction dérivable sur un intervalle I, montrons que la condition

(C) : « $f' > 0$ sauf en un nombre fini de réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ »

est une condition suffisante pour que f soit strictement croissante sur I.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et vérifiant la condition (C).

- Pour tout réel x de I on a $f'(x) \geq 0$, donc, d'après le théorème (1b), f est croissante sur I.
- Supposons que f ne soit pas strictement croissante sur I.

  Alors il existe deux réels a et b de I, avec $a < b$, vérifiant $f(a) = f(b)$.

  Comme f est croissante sur I, pour tout réel c de $[\ a\ ;\ b\ ]$ on a : $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$.

  On en déduit donc que, pour tout réel c de $[\ a\ ;\ b\ ]$, on a : $f(a) = f(c) = f(b)$; f est donc constante sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, et donc, d'après le théorème 1 (1a), pour tout réel x de $[\ a\ ;\ b\ ]$, on a : $f'(x) = 0$.

  f' s'annule donc pour une infinité de valeurs, ce qui contredit l'hypothèse.

  Donc f est strictement croissante sur I.

Ainsi nous avons le théorème :

> THÉORÈMES
> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
> - Si f' est strictement positive sur I, sauf en un nombre fini de réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur I. (2a)
> - Si f' est strictement négative sur I, sauf en un nombre fini de réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante sur I. (2b)

2. Recherche de conditions nécessaires : quel ensemble de zéros pour la dérivée ?

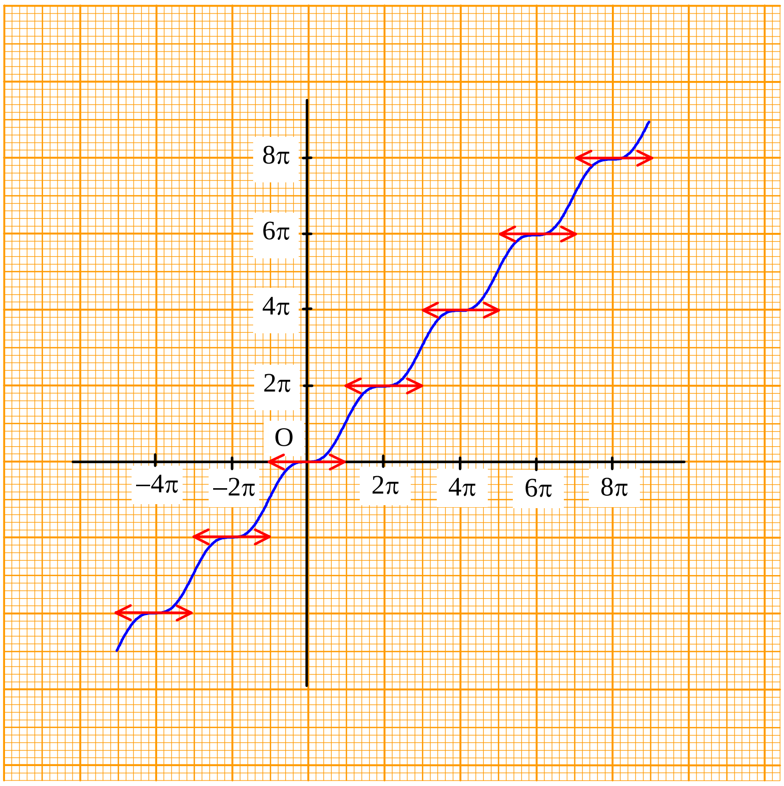
Exemple 4. Une infinité de zéros.

Soit f_4 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_4(x) = x - \sin(x)$.

- f_4 est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, et pour tout réel x : $f_4'(x) = 1 - \cos(x)$, donc pour tout réel x : $f_4'(x) \geq 0$.

- $f_4'(x) = 0$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $x = 2k\pi$;

  f_4' s'annule donc pour une infinité de réels.



- Pourtant f_4 est strictement croissante sur $\mathbf{R}$; en effet :
  - pour tout entier naturel non nul k, f_4' s'annule pour un nombre fini de réels de $[-2k\pi ; 2k\pi]$, donc, d'après le théorème 2, f_4 est strictement croissante sur $[-2k\pi ; 2k\pi]$;
  - soit deux réels a et b tels que $a < b$, il existe un entier naturel non nul k tel que $[a ; b] \subset [-2k\pi ; 2k\pi]$. f étant strictement croissante sur $[-2k\pi ; 2k\pi]$ on a : $f(a) < f(b)$.

Donc f_4 est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

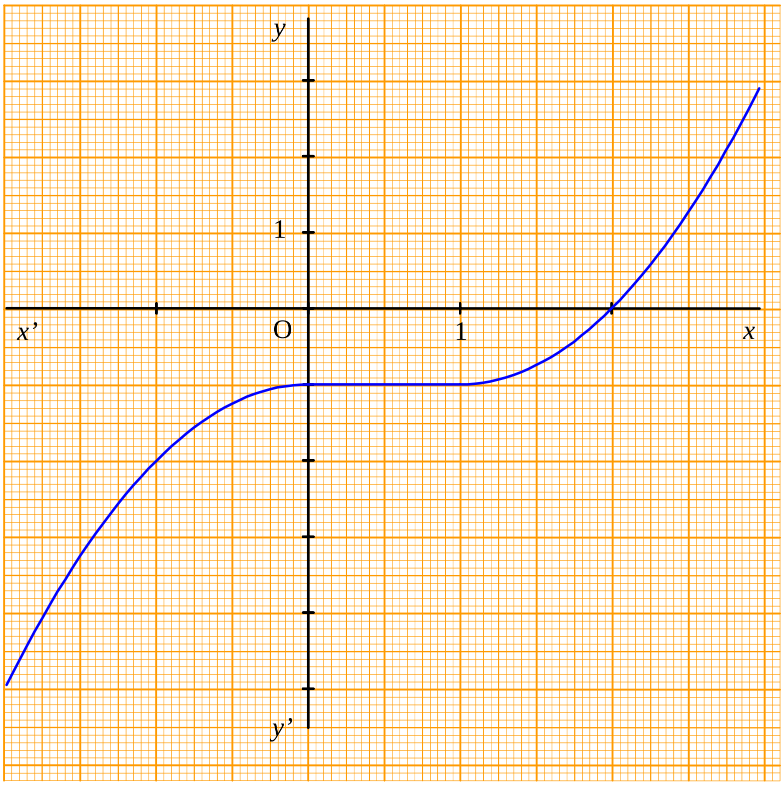
La condition (C) n'est donc pas nécessaire !

Exemple 5. Une infinité de zéros.

Soit f_5 la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\begin{cases} f_5(x) = -x^2 - 1 & \text{pour } x \in]-\infty\,;0]\,; \\ f_5(x) = -1 & \text{pour } x \in]0\,;1]\,; \\ f_5(x) = (x-1)^2 - 1 & \text{pour } x \in]1\,;+\infty[\,. \end{cases}$

- f_5 est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x, on a $f_5'(x) \geq 0$ donc, d'après le théorème (1b), on en déduit que f_5 est croissante sur $\mathbf{R}$.

- Cependant f_5 est constante sur $]\,0\,;1\,[$ et donc f_5 n'est pas strictement croissante sur $\mathbf{R}$.



f étant une fonction dérivable sur un intervalle I, montrons que la condition (C') : « pour tout réel x de I on a : $f'(x) \geq 0$ et l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide » est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit strictement croissante sur I.

Démonstration

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et vérifiant la condition (C').

- Pour tout réel x de I on a : $f'(x) \geq 0$, donc, d'après le théorème 1, f est croissante sur I.
- Supposons que f ne soit pas strictement croissante sur I.

  Alors il existe deux réels a et b de I, avec $a < b$, vérifiant $f(a) = f(b)$.

  Comme f est croissante sur I, pour tout réel c de $[\,a\,;b\,]$ on a : $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$.

  On en déduit donc que, pour tout réel c de $[\,a\,;b\,]$, on a : $f(a) = f(c) = f(b)$; f est donc constante sur $[\,a\,;b\,]$, et donc, d'après le théorème 1, pour tout réel x de $[\,a\,;b\,]$, on a : $f'(x) = 0$.

  Donc l'ensemble des réels x pour lesquels $f'(x) = 0$ contient un intervalle ouvert non vide, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc f est strictement croissante sur I.

2. Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur un intervalle I.

- D'après le théorème 1, pour tout x de I, on a $f'(x) \geq 0$.

- Supposons que l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ contienne un intervalle ouvert $]\, a\, ;\, b\, [$ non vide, alors, d'après le théorème 1, f est constante sur $]\, a\, ;\, b\, [$ et donc f n'est pas strictement croissante sur I, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi nous avons le théorème

THÉORÈME 3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ et si l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ et si l'ensemble des réels x de I pour lesquels $f'(x) = 0$ ne contient pas d'intervalle ouvert non vide.

C. Exercice d'application

Soit f la fonction définie sur $]\, 0\, ;\, 1\,]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2} - \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]\, 0\, ;\, 1\,]$ et que, pour tout réel x de $]\, 0\, ;\, 1\,]$, on a :
$$f'(x) = \frac{-\dfrac{2}{x^3}\left[1 - \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}{\left[\dfrac{1}{x^2} - \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]^2}.$$

2. a. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.

   b. Soit E l'ensemble des réel de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}$, avec k entier naturel non nul.

   Montrer, par l'absurde, que E ne contient aucun intervalle ouvert non vide.

   Aide : si $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2(k+1)\pi}} ; \dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right] \subset E$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}} \in E$; or $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}\right) \neq 0 \ldots$

3. Conclure.