AU CŒUR DE LA TOILE

Objectif	*Traduire, à l'aide d'une suite, un processus géométrique itératif et rendre compte de son évolution.* *Mettre en place les premiers principes d'étude d'une suite itérée : exploitation de la fonction numérique sous-jacente, majoration par une suite géométrique.*
Notions utilisées	*Suites géométriques ; limites des suites géométriques ; variations d'une fonction numérique.*

Deux problèmes tout à fait comparables de convergence de suites de nombres rationnels où il s'agit de formaliser le problème, d'étudier la suite et de reconstituer les étapes de la démarche.

Cette activité est extraite de la brochure « Espace modules – Première S »
publiée par le CRDP d'Aquitaine (1996 – ISBN 2-86617-322-8).

Problème 1. Format radical

On se propose d'approcher $\sqrt{2}$ à l'aide d'une suite de nombres rationnels définis par l'algorithme géométrique décrit ci-contre.

Partant du rectangle $OA_0B_0C_0$ (noté R_0) tel que $OA_0 = 1$ et $OC_0 = 2$, on construit « extérieurement » le carré $B_0C_0A_1I_1$, puis le carré $A_0I_1B_1C_1$ pour obtenir le rectangle $OA_1B_1C_1$ (noté R_1).

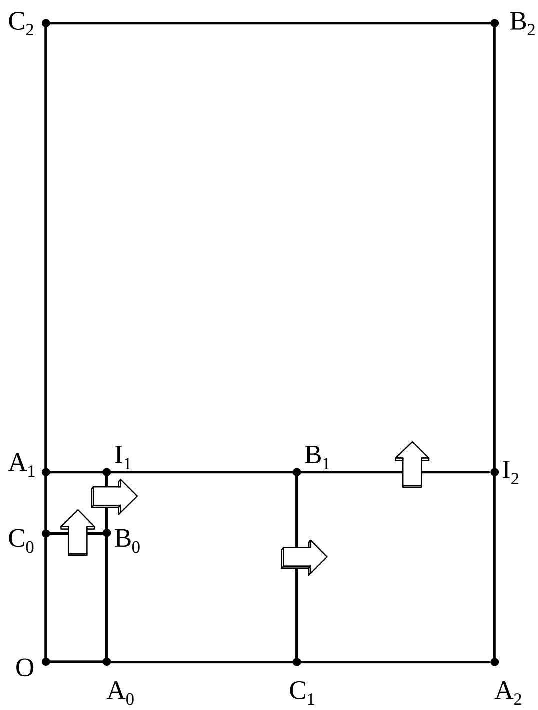
De même, à partir du rectangle $OA_1B_1C_1$, on construit « extérieurement » le carré $B_1C_1A_2I_2$, puis le carré $A_1I_2B_2C_2$, pour obtenir le rectangle $OA_2B_2C_2$ (noté R_2).

Et ainsi de suite...

Pour tout entier naturel n, on note respectivement L_n et l_n la longueur et la largeur du rectangle R_n.

On appelle format de R_n , et on note q_n ,

le quotient $\dfrac{L_n}{l_n}$.



A. Relation de récurrence

1. Calculer les six premiers formats et en donner une valeur approchée à 10^{-4} près.
   Classer ces nombres dans l'ordre croissant et les comparer à $\sqrt{2}$.

2. Exprimer les dimensions du rectangle R_{n+1} en fonction des dimensions du rectangle R_n.
   En déduire le format q_{n+1} de R_{n+1} en fonction du format q_n de R_n.

B. Comportement de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{1+x}$, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ et la droite Δ d'équation $y=x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$ et tracer la courbe $\mathcal{C}$ (unité graphique : 9 cm).
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$, on a : $1\leq f(x)\leq 2$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $1\leq q_n\leq 2$.
   À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ, représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite.

2. a. Déterminer le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$, distinct de $\sqrt{2}$, on a : $\dfrac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}<0$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{q_{n+1}-\sqrt{2}}{q_n-\sqrt{2}}<0$.
   Situer alors les différents termes de la suite par rapport à $\sqrt{2}$.

3. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$, on a l'égalité :
   $$f(x)-f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}-x}{(1+x)(1+\sqrt{2})}.$$
   Démontrer que $\left|f(x)-\sqrt{2}\right|\leq\dfrac{1}{4}\left|x-\sqrt{2}\right|$.

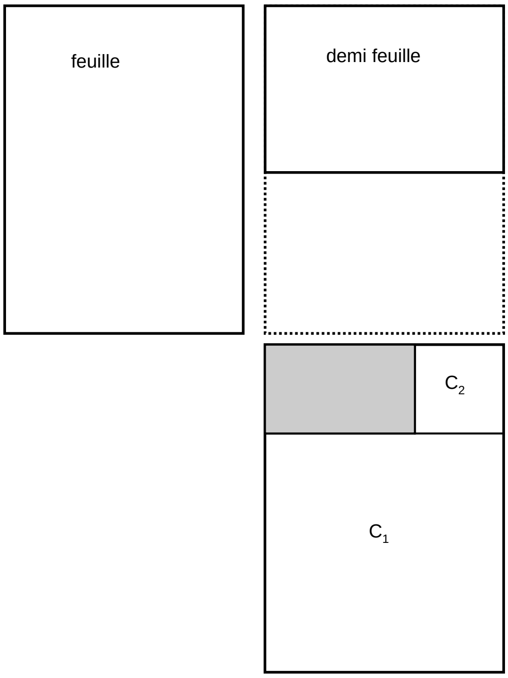
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$\left|q_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq\frac{1}{4}\left|q_n-\sqrt{2}\right|\ ;$$
   $$\left|q_n-\sqrt{2}\right|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n\left|q_0-\sqrt{2}\right|\ ;$$
   et enfin $\left|q_n-\sqrt{2}\right|\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

4. Démontrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

C. Récréation 1. Découpage

Dans l'imprimerie, les standards usuels du papier, désignés par A0, A1, A2, ..., ont été définis de telle sorte qu'une feuille et une demi feuille aient le même format.

Quel est ce format ?



Sachant que l'aire d'une feuille de papier A0 est de $1 m^2$, calculer ses dimensions.

Quelles sont les dimensions d'une feuille de papier de type A4 ?

Sur une feuille de papier de type A4, tracer les deux carrés C_1 et C_2 indiqués par le schéma.

Quel est le format du rectangle restant ?

D. Récréation 2. Algorithme de Babylone

Début

Choisir un nombre positif quelconque x, de préférence « simple » et pas trop éloigné de $\sqrt{2}$.

Calculer le nombre $y = \frac{2}{x}$

Tant que $|x - y| > 10^{-5}$

  Prendre pour nouvelle valeur de x le nombre $\frac{x+y}{2}$

  Prendre pour nouvelle valeur de y le nombre $\frac{2}{x}$

Fin de boucle

Fin.

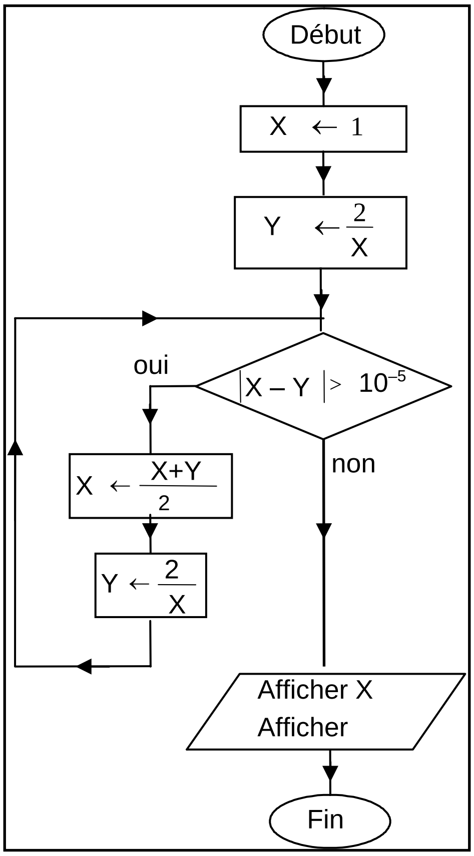


Table des valeurs exactes de x et y (à compléter) :

	init.	boucle 1	boucle 2	boucle 3	…
x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	…	…
y	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{24}{17}$	…	…

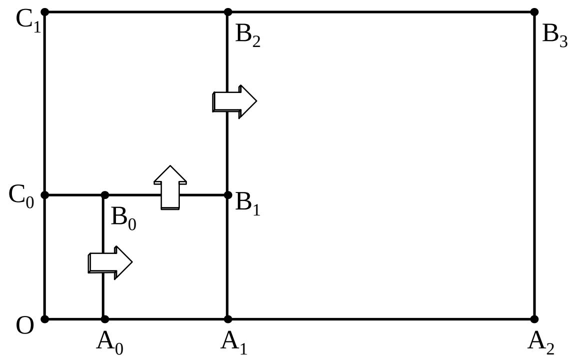
Dresser la table correspondante des valeurs approchées à 10^{-5} près.

Démontrer que $\sqrt{2}$ est compris entre x et y.

Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Problème 2. À la poursuite du nombre d'or

On se propose d'approcher le « nombre d'or », $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$, que l'on notera φ, à l'aide d'une suite de nombres rationnels définis par l'algorithme géométrique décrit ci-contre.



Partant du rectangle $OA_0B_0C_0$ (noté R_0) tel que $OA_0 = 1$ et $OC_0 = 2$, on construit « extérieurement » le carré $A_0B_0B_1A_1$ pour obtenir le rectangle $OA_1B_1C_0$ (noté R_1).

De même, à partir du rectangle $OA_1B_1C_0$, on construit « extérieurement » le carré $C_0B_1B_2C_1$ pour obtenir le rectangle $OA_1B_2C_1$ (noté R_2).

Et ainsi de suite...

Pour tout entier naturel n, on note respectivement L_n et l_n la longueur et la largeur du rectangle R_n.

On appelle format de R_n , et on note q_n , le quotient $\frac{L_n}{l_n}$.

A. Relation de récurrence

1. Calculer les six premiers formats et en donner une valeur approchée à 10^{-4} près.
   Classer ces nombres dans l'ordre croissant et les comparer à φ.

2. Exprimer les dimensions du rectangle R_{n+1} en fonction des dimensions du rectangle R_n.
   En déduire le format q_{n+1} de R_{n+1} en fonction du format q_n de R_n.

B. Comportement de la suite $(q_n)_{n\in \mathbb{N}}$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$ par $f(x) = 1+\frac{1}{x}$, sa courbe représentative $\mathcal{C}$ et la droite Δ d'équation $y = x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$ et tracer la courbe $\mathcal{C}$ (unité graphique : 9 cm).
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$, on a : $1 \le f(x) \le 2$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \le q_n \le 2$.
   À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ, représenter, sur l'axe des abscisses, les premiers termes de la suite.

2. a. Déterminer le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ.

   Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$, distinct de φ, on a : $\frac{f(x)-f(\varphi)}{x-\varphi} < 0$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{q_{n+1}-\varphi}{q_n-\varphi} < 0$.

   Situer alors les différents termes de la suite par rapport à φ.

3. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$, on a : $f(x)-f(\varphi)=\dfrac{\varphi-x}{\varphi x}$.

   Démontrer que $|f(x)-\varphi|\leq\dfrac{2}{3}|x-\varphi|$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

   $|q_{n+1}-\varphi|\leq\dfrac{2}{3}|q_n-\varphi|$;

   $|q_n-\varphi|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n|q_0-\varphi|$;

   et enfin $|q_n-\varphi|\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

4. Démontrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ.

C. Récréation. Modulor

Dans un « rectangle d'or », la longueur est la moyenne géométrique entre la largeur et la somme de la longueur et de la largeur.

Quel est le format d'un rectangle d'or ?

Justifier cette construction d'un rectangle d'or dont la largeur est donnée.