ÉQUATION F(X) = X

Objectif	*Donner des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = x$ puis, dans certains cas, trouver une suite donnant des valeurs approchées d'une telle solution.*
Outils	*Analyse de terminale S.* *Image d'un intervalle par une fonction continue.* *Suites*

On se propose de prouver l'existence de solutions de l'équation $f(x) = x$ pour certains types de fonctions f, puis, pour une fonction vérifiant certaines hypothèses, d'approcher l'unique solution de cette équation à l'aide d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

A. Conditions suffisantes d'existence d'une solution

Premier cas : f est une fonction continue et décroissante sur R.

1. f étant une fonction continue et décroissante sur **R**, montrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur **R**.
2. Comparer $g(x)$ avec $f(0) - x$ dans le cas où x est positif.
   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   À l'aide d'un raisonnement semblable, déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α.
4. Exemple.
   Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{1-2e^x}{1+2e^x}$.
   a. En utilisant le résultat établi ci-dessus, démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
   b. Démontrer que a vérifie cette autre équation : $\alpha = -\ln 2 + \ln(1-\alpha) - \ln(1+\alpha)$.
   (Au cours de cette démonstration on établira que α appartient à l'intervalle $]-1 ; 1[$.

Deuxième cas : f est une fonction continue sur [a ; b] et [a ; b] est stable par f.

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. On suppose que l'intervalle [a ; b] est stable par f c'est-à-dire que, pour tout x appartenant à [a ; b], $f(x)$ appartient à [a ; b].

1. Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ s'annule au moins une fois sur [a ; b].
   En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans [a ; b].

> Remarquons que, si f est définie et continue sur un intervalle I stable par f, mais si I n'est plus supposé fermé, l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = x$ n'est plus assurée. C'est ce que montre l'exemple suivant.

2. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

   Démontrer que f est continue sur $]\,1\,;\,2\,[$, que $]\,1\,;\,2\,[$ est stable par f, et que, pourtant, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution appartenant à $]\,1\,;\,2\,[$.

B. Approximation de la solution de $f(x) = x$ à l'aide d'une suite

On considère un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$, un réel k appartenant à $]\,0\,;\,1\,[$ et une fonction f vérifiant :

– f est dérivable sur $[\,a\,;\,b\,]$.

– $[\,a\,;\,b\,]$ est stable par f.

– pour tout réel x de $[\,a\,;\,b\,]$, $|f'(x)| \leq k$.

1. À l'aide des résultats de la partie A, démontrer l'existence d'un réel α solution de l'équation $f(x) = x$.

2. On suppose que cette équation admet des solutions α et β.

   À l'aide de l'inégalité des accroissements finis démontrer que $|\alpha - \beta| \leq k\,|\alpha - \beta|$, puis que $\alpha = \beta$.

3. Soit r un réel de l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. On définit une suite u d'éléments de $[\,a\,;\,b\,]$ en posant $u_0 = r$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Démontrer que, pour tout entier n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k\,|u_n - \alpha|$.

   b. En déduire que, pour tout entier n, on a : $|u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|$ et que la suite u est convergente.

4. Exemple.

   On se propose de trouver une valeur approchée, à 10^{-3} près, de la solution de l'équation $\cos x = x$.

   a. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer, sur $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$, la courbe d'équation $y = \cos x$ et la droite d'équation $y = x$.

      On constate graphiquement, et on admettra, que l'équation $\cos x = x$ possède une solution et une seule, α, et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

   b. Montrer que la fonction définie par $f(x) = \cos x$ sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ vérifie les hypothèses de cette partie et que l'on peut prendre $k = 0{,}85$.

   c. Soit u la suite de premier terme $u_0 = 0{,}5$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

      Déterminer un entier naturel n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| < 10^{-3}$?

      Programmer sur la calculatrice le calcul des termes de la suite u.

      En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.