VARIATION : DE LA SUITE À LA FONCTION

Objectif	*Proposer des contre-exemples montrant que les réciproques des théorèmes permettant de déduire le sens de variation d'une suite $u_n = f(n)$ à partir du sens de variation de f sont fausses.*
Outils	*Suites*

On a déjà justifié les trois théorèmes suivants :

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}^+$.

(1) si f est constante sur $\mathbf{R}^+$ alors la suite u, définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = f(n)$, est constante.

(2) si f est croissante sur $\mathbf{R}^+$ alors la suite u, définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = f(n)$, est croissante ;

(3) si f est décroissante sur $\mathbf{R}^+$ alors la suite u, définie sur $\mathbf{N}$ par $u_n = f(n)$, est décroissante ;

L'objectif de cette activité est de réfléchir sur la véracité des réciproques de ces théorèmes.

A. Contre-exemple à la réciproque du théorème 1

1. Soit la suite (u_n), définie, sur **N**, par $u_n = \sin(\pi n)$.

   Calculer u_n. Que peut-on en conclure ?

2. En utilisant le théorème dit « de la variation de la composée », étudier sur $[\,0\,;\,2\,]$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

   Prouver que f est périodique.

3. La réciproque du théorème (1) est-elle vraie ?

B. Contre-exemples à la réciproque des théorèmes 2 et 3

Exemple 1

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n), définie, sur **N**, par $u_n = n - 2n^2$.

2. Étudier sur $[\,0\,;+\infty\,[$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - 2x^2$.

3. La réciproque du théorème (3) est-elle vraie ?

Exemple 2

On propose maintenant un contre-exemple plus « fort » pour lequel la suite (u_n) est strictement monotone, bien que la fonction associée ne soit monotone sur aucun intervalle de la forme $[\, a \,;\, +\infty\, [$, $a \in \mathbf{R}$.

1. Soit la suite (u_n), définie, sur **N**, par $u_n = n\cos(2\pi n)$.

   Écrire plus simplement u_n . Quelle est le sens de variation de cette suite ?

2. f est la fonction définie, pour tout réel positif x, par : $f(x) = x\cos(2\pi x)$.

   Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice.

   Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $f(n)$, $f\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$, $f(n+1)$.

   En déduire que f n'est monotone sur aucun des intervalles de la forme $[\, a \,;\, +\infty\, [$