VII – Intégration

EXPOSITION EN SÉRIE

Objectif	*Obtenir* e^a *comme limite d'une suite.*
Notions utilisées	*Intégration par parties. Obtention de la limite par encadrements. Raisonnement par récurrence.*

Obtenir e^a comme limite d'une suite.

D'après un problème de bac 1978

Dans tout le problème a est un nombre réel donné strictement positif.

1. Par une intégration par parties montrer que $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)\,e^t\,dt$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t\,dt$.

   Démontrer que $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + I_n$.

4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$.

   b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

   Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on a $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.

   En déduire que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq u_N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$.

   c. En déduire les limites de u_n et de I_n quand n tend vers $+\infty$ et montrer que :

   $$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$$

SUITES INTÉGRALEMENT DIABOLIQUES

Objectif	*Établir le comportement asymptotique de deux suites grâce aux propriétés d'une suite d'intégrales..*
Notions utilisées	*Théorèmes sur les limites (le théorème sur la convergence d'une suite décroissante positive est rappelé). Raisonnement par récurrence. Intégration par parties. Intégration et ordre.*

Ce problème a pour propos l'étude des suites u et v définies sur $\mathbf{N}^*$ par :

$$u_p = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)} \text{ et } v_p = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p+1)}$$

u_p est le quotient du produit des p premiers naturels impairs par le produit des p premiers naturels pairs non nuls. v_p est le quotient du produit des p premiers naturels pairs non nuls par le produit des $(p + 1)$ naturels impairs.

Dans une première partie, on exploite la définition des suites u et v.

Dans une seconde partie, on utilise une suite d'intégrales afin d'obtenir des résultats beaucoup plus précis.

Dans une troisième partie, on traduit le résultat obtenu en un résultat faisant intervenir des factorielles.

On considère les suites u et v définies sur $\mathbf{N}^*$ par :

$$u_p = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)} \text{ et } v_p = \frac{2\times 4\times 6\times \ldots \times (2p)}{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2p+1)}.$$

A. Limite des suites u et v.

1. Démontrer que les suites u et v sont décroissantes. Comme elles sont positives, on en déduit qu'elles sont convergentes. On note ℓ la limite de la suite u et ℓ' la limite de la suite v.
2. a. Pour tout entier naturel non nul p, exprimer $u_p.v_p$ en fonction de p.

   b. Démontrer que l'un au moins des réels ℓ et ℓ' est nul.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul p, on a $u_p \leq v_p \leq 2.u_p$.

   b. En déduire que les suites u et v convergent toutes deux vers zéro.

B. Autres propriétés des suites u et v

On considère la suite i définie sur $\mathbf{N}$ de la façon suivante :

$i_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ et, pour tout entier naturel non nul n, $i_n = I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$

1. a. Calculer i_1 et i_2.

   b. Soit n un entier naturel. Exprimer i_{n+2} en fonction de i_n, grâce à une intégration par parties de i_{n+2} au cours de laquelle on considérera une primitive de la fonction cosinus.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel p, on a $i_{2p} = \frac{\pi}{2} u_p$ et $i_{2p+1} = v_p$.

2. a. En revenant à la définition même de i_n, démontrer que la suite i est décroissante.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{i_{n+1}}{i_n} \leq 1$.

   c. En déduire que la suite $\frac{v_p}{u_p}$ est convergente vers une limite que l'on précisera.

3. a. À l'aide du résultat établi dans la question A.2.a., démontrer que, pour tout entier naturel non nul p, on a $\left(u_p \sqrt{p}\right)^2 = \frac{p}{2p+1} \times \frac{u_p}{v_p}$

   b. En déduire que les suites de terme général $u_p \sqrt{p}$ et $v_p \sqrt{p}$ convergent vers des réels que l'on précisera.

   c. Soit les suites u' et v' définies sur $\mathbf{N^*}$ par $u'_p = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{p}}$ et $v'_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

   Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{u_p}{u'_p} = 1$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{v_p}{v'_p} = 1$

   On dit alors que la suite u est équivalente à la suite u' au voisinage de $+\infty$. De même v est équivalente à v' au voisinage de $+\infty$. On a donc réussi à comparer les suites u et v à des suites d'expressions très simples.

C. Interprétation du résultat précédent avec des factorielles

1. Soit p un entier naturel non nul.

   a. Exprimer $\left(2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2p)\right)^2 u_p$ sous une forme très simple.

   b. En déduire l'expression de u_p en fonction de $(2p)!$ et $p!$.

2. Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{(2p)!}{\left(2^p . p!\right)^2} \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, résultat fort surprenant car il fait intervenir π dans un résultat sur les factorielles et les racines carrées.

QUAND S DEVIENT SIGMA

Objectif	*Utiliser le théorème sur les fonctions monotones bornées pour étudier l'existence de limites.*
Outils	*Connaissance des propriétés usuelles de la fonction exponentielle. Bonne maîtrise du calcul intégral décrit dans les programmes de terminale S. Théorème sur les fonctions monotones bornées.*

On se propose d'exprimer l'aire d'une surface illimitée comme une limite de suite puis de trouver une valeur approchée de cette aire.

Première méthode

Partie A

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = e^x(2 - x)$.
   a. Étudier les variations de la fonction h et déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Soit m un nombre réel donné.
   Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$.
   a. Démontrer que f est dérivable en zéro et déterminer le nombre dérivé.
   b. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbf{R}$ et calculer la fonction dérivée f'.
   Démontrer qu'il existe un réel a unique tel que $f'(a) = 0$.
   Démontrer que $f(a) = a(2 - a)$ et que a appartient à l'intervalle $]\,1{,}59 ; 1{,}6\,[$.
   c. Étudier les variations de la fonction f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 2 cm) en précisant les branches infinies.

3. On pose, pour tout réel positif x, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.
   a. Résoudre l'inéquation $f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$ dans $[\,0 ; +\infty[$.
   b. On pose, pour tout réel positif x, $G(x) = \displaystyle\int_{\ln 2}^x t^2 e^{-t}\,dt$.
   Calculer $G(x)$ à l'aide d'une double intégration par parties et démontrer que G admet en $+\infty$ une limite que l'on calculera.
   c. Déduire des questions précédentes que F est une fonction bornée.
   d. Démontrer que F est une fonction croissante sur $[\,0 ; +\infty[$.

   Il en résulte que F admet, en $+\infty$, une limite finie ℓ.

Partie B

1. Démontrer que pour tout entier naturel k non nul et pour tout réel x non nul on a :

$$\frac{1}{e^x-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots.. + e^{-(k-1)x} + e^{-kx} + \frac{e^{-kx}}{e^x-1}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel k non nul et pour tout réel x positif on a :
$0 \le \int_0^x f(t)e^{-kt}dt \le \frac{a(2-a)}{k}$ où a est le nombre défini dans la partie A.2.b.

3. Calculer, à l'aide d'une double intégration par parties, l'intégrale $I_p(x) = \int_0^x t^2\, \mathrm{e}^{-pt}\, dt$ où p est un entier naturel non nul et x un réel positif donnés.
Démontrer que $I_p(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

4. a. Démontrer que, pour tout réel positif x, on a $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\, dt = F(x) - \sum_{p=1}^{p=k} I_p(x)$.

   En déduire que la fonction qui, à tout réel positif x, associe l'intégrale $\int_0^x f(t)e^{-kt}dt$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$. On notera ℓ_k cette limite.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a $\ell - \ell_k = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots. + \frac{1}{k^3}\right)$.

   c. En utilisant l'encadrement obtenu à la question B.2, démontrer que la suite (ℓ_k) converge vers 0.

   d. Démontrer que la suite de terme général $u_k = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots. + \frac{1}{k^3}$ est convergente et que, si on note ℓ' sa limite, on a: $\ell = 2\,\ell'$.

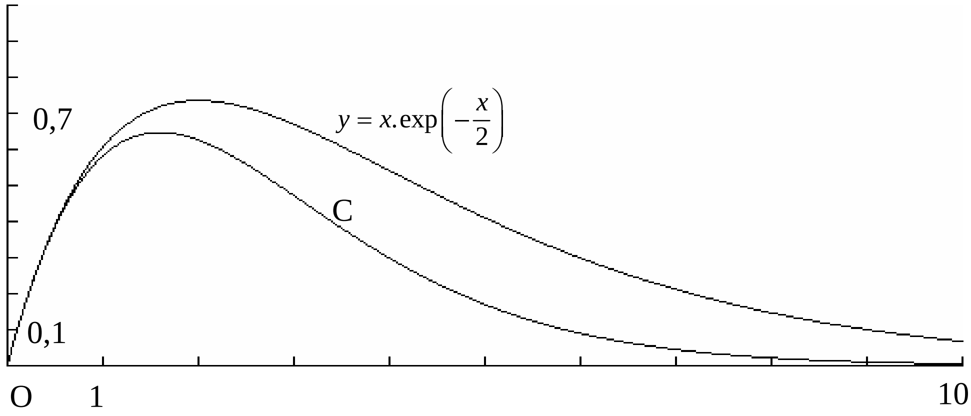
   e. Trouver une condition suffisante, portant sur l'entier k, pour que $\ell_k \le 0{,}1$.

   En déduire que $2{,}3 \le \ell \le 2{,}5$.

Deuxième méthode

On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1}$ si $x>0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$. On a tracé $\mathcal{C}$ sur le graphique ci-dessous[1].



1. Interprétation graphique de certaines intégrales.
   a. Démontrer que f admet pour limite zéro en $+\infty$.
   b. Démontrer que f est dérivable en 0.
   c. Justifier l'existence, pour tout nombre positif m, de l'intégrale $\int_0^m f(x)\,dx$.

   On note F la fonction définie pour tout réel positif m par : $F(m)=\int_0^m f(x)\,dx$.

   d. Interpréter graphiquement $F(m)$, m étant un réel positif.
   e. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[\,0\,;+\infty[$.

2. Existence d'une limite finie de F en $+\infty$

   Pour démontrer que F admet une limite en $+\infty$, on cherche à majorer F, et pour cela on va d'abord majorer f par une fonction g dont on sait calculer les intégrales sur $[\,0\,;m\,]$.

   a. Soit φ la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $\varphi(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-x$ et φ' sa fonction dérivée.

   Étudier les variations de φ', puis celles de φ, et en déduire le signe de φ.

   En déduire que pour tout réel positif x, on a : $x\le \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   b. En déduire que pour tout réel positif x, $f(x)\le x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

   Démontrer que pour tout réel positif m : $F(m)\le\int_0^m x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx$. Cette deuxième intégrale sera notée $I_{\frac{1}{2}}(m)$.

   c. Plutôt que de calculer seulement cette dernière intégrale, on va se placer dans un cas plus général, qui va être utile pour la suite. Pour tous réels positifs λ et m, on pose :

[1] Il est aisé de démontrer qu'il existe un nombre strictement positif a tel que f soit strictement croissante sur $[\,0\,;a\,]$ et strictement décroissante sur $[\,a\,;+\infty\,[$. Mais ces résultats ne seront pas utilisés dans la suite du problème.

$$I_\lambda(m) = \int_0^m x \cdot e^{-\lambda x}\, dx \,.$$

Calculer $I_\lambda(m)$ en fonction de λ et de m, grâce à une intégration par parties.

Démontrer que pour tous réels positifs λ et m, $I_\lambda(m) \leq \dfrac{1}{\lambda^2}$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} I_\lambda(m) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

d. Déduire des questions précédentes un nombre réel qui soit un majorant de F sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

F étant croissante et majorée sur $[\,0\,;+\infty\,[$, elle admet donc une limite finie en $+\infty$ que l'on note ℓ.

e. Donner une interprétation graphique de ℓ (on ne demande pas de justifier cette interprétation).

3. Approximation de ℓ à l'aide d'une suite

a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel non nul x on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-(k-1)x} + e^{-kx} + \frac{e^{-kx}}{e^x - 1}$$

Pour tout entier naturel k et tout réel positif m, on pose $J_k(m) = \int_0^m x^2\, e^{-kx}\, dx$.

Démontrer que pour tout entier naturel k et tout réel positif m,

$$F(m) = J_1(m) + J_2(m) + \ldots + J_k(m) + \int_0^m f(x) \cdot e^{-kx}\, dx$$

On pose alors $R_k(m) = F(m) - \left[J_1(m) + J_2(m) + \ldots + J_k(m)\right] = \int_0^m f(x) \cdot e^{-kx}\, dx$.

b. Grâce à une intégration par parties, exprimer $J_k(m)$ en fonction de $I_k(m)$.

En déduire que $\lim\limits_{m\to+\infty} J_k(m) = \dfrac{2}{k^3}$.

c. En utilisant la majoration de f établie à la question 2.b., démontrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel non nul m on a les inégalités suivantes :

$0 \leq R_k(m) \leq I_{k+\frac{1}{2}}(m)$, puis $0 \leq R_k(m) \leq \dfrac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$.

En déduire que, pour tout entier naturel non nul k, $0 \leq \ell - 2\left(1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{k^3}\right) \leq \dfrac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$

d. Démontrer que la suite u de terme général $u_k = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{1}{k^3}$ est convergente et a pour limite $\dfrac{\ell}{2}$.

e. Poser $k = 10$ dans le dernier encadrement de la question c. et en déduire une valeur approchée de ℓ à $0{,}01$ près.

LE PARADOXE DE LA MOYENNE

Objectif	*Faire réfléchir sur la notion de moyenne.*
Outils	*Calcul intégral. Définition de la moyenne d'une fonction sur un intervalle*

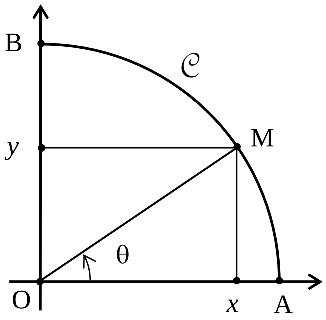
On connaît la définition de la moyenne d'une fonction sur un intervalle et on suppose que le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct.
Peut-on calculer la « moyenne des ordonnées » des points du quart de cercle ayant pour centre l'origine du repère, pour rayon 1 et situé dans le premier quadrant ?

On appelle moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[\, a\ ;\ b\,]$ le nombre m tel que $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$,

on veut calculer « la moyenne des ordonnées » des points du quart de cercle $\mathcal{C}$ de centre O et d'extrémités A et B.

Pour tout point M de $\mathcal{C}$, on note y_{M} l'ordonnée de M.



A. Deux méthodes contradictoires

1. Pour M élément de $\mathcal{C}$, on note θ la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

   Exprimer y_{M} en fonction de θ. On définit ainsi une fonction f_1.

   En utilisant f_1, que vaut « la moyenne des y_{M} pour θ élément de $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ » ?

   On note m_1 ce résultat.

2. Pour M élément de $\mathcal{C}$, on note x l'abscisse de M.

   Exprimer y_{M} en fonction de x. On définit ainsi une fonction f_2.

   Démontrer qu'en utilisant f_2, « la moyenne des y_{M} pour x élément de $[\,0\ ;\ 1\,]$ » vaut $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

   On note m_2 ce résultat.

   En interprétant m_2 comme une aire, donner la valeur numérique de m_2.

3. Faire apparaître une contradiction.

B. De pire en pire

1. Pour M élément de $\mathcal{C}$, on note u le carré de l'abscisse de M ; on a donc $u = x^2$.

   Exprimer y_M en fonction de u. On définit ainsi une fonction f_3.

   En utilisant f_3, que vaut « la moyenne des y_M pour $u = x^2$ élément de $[\,0\,;\,1\,]$ » ?

   On note m_3 ce résultat.

2. Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, quel intervalle décrit y_M ?

   Comment peut-on envisager de calculer « la moyenne des y_M » pour y_M élément de $[\,0\,;\,1\,]$?

   On note m_4 ce résultat.

Toutes ces valeurs sont contradictoires !

C. La solution de ce paradoxe

La contradiction provient du fait que l'on ne doit parler que de la valeur moyenne d'une fonction et non de la valeur moyenne d'une « quantité ».

Les nombres m_1, m_2, m_3, m_4, sont les moyennes de différentes fonctions. Il n'est donc pas surprenant qu'elles soient distinctes.

Quant à « la valeur moyenne des y_M pour M élément de $\mathcal{C}$ », ce n'est pas un nombre défini avec suffisamment de précision.

D. Une interprétation physique des différentes moyennes

On peut imaginer que le point M se déplace sur $\mathcal{C}$. Alors les différents nombres θ, x, u, y, varient en fonction du temps.

La moyenne des y_M lorsque M parcourt $\mathcal{C}$ dépend de la nature du mouvement de M sur $\mathcal{C}$.

Plus précisément, cette moyenne est égale à m_1, m_2, m_3, m_4, suivant que respectivement θ, x, u, y sont fonction affine du temps (c'est-à-dire varient avec une vitesse de variation constante).

- Si θ est fonction affine du temps, c'est-à-dire si M est animé d'un mouvement circulaire uniforme, alors la moyenne des ordonnées y_M est égale à m_1.
- Si M parcourt $\mathcal{C}$ de telle sorte que x soit fonction affine du temps, alors la moyenne des ordonnées est égale à m_2.
- Si M parcourt $\mathcal{C}$ de telle sorte que $u = x^2$ soit fonction affine du temps, alors la moyenne des ordonnées est égale à m_3.
- Si M parcourt $\mathcal{C}$ de telle sorte que y_M soit fonction affine du temps, alors la moyenne des ordonnées y_M est égale à m_4.

UN CALCUL D'INTÉGRALE CHEZ PASCAL

Objectif	*Lire et comprendre un texte historique, l'adapter en langage moderne, redémontrer certains de ses résultats.* *S'initier aux sommes de Riemann.*
Notions utilisées	*Définition de l'intégrale. Interprétation en terme d'aire.*

Il a fallu attendre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1715) pour qu'apparaisse le signe d'intégration $\int$, ainsi que la notation *dx*. C'est à ce même mathématicien, concurremment avec Isaac Newton (1642-1727), que l'on doit aussi des conceptions et des méthodes simples et claires dans le domaine de l'intégration. Cependant, bien avant eux, depuis Archimède (282-212 avant Jésus-Christ), des mathématiciens pratiquaient des calculs que nous appellerions *intégrations*, qui prenaient la forme de calculs d'aires, de volumes ou de longueurs, ou de déterminations de centres de gravité.

Leibniz trouva sa source d'inspiration dans l'œuvre de son illustre prédécesseur Blaise Pascal (1623-1662). Celui-ci, grand philosophe et grand écrivain, est aussi l'auteur d'une œuvre mathématique de première importance. Ses lettres regroupées sous le titre « *la Roulette et autres traités connexes* » sont considérées comme le premier traité de calcul intégral. Mais Pascal n'utilise bien sûr ni le mot, ni le signe d'*intégrale* ; il ne parle que de *sommations*.

Dans le texte présenté ci-après, Blaise Pascal calcule une « somme de sinus », c'est-à-dire, avec notre vocabulaire, l'intégrale de la fonction sinus sur un intervalle.

Il s'agit d'étudier ce texte, de traduire certaines expressions en langage moderne et de comprendre la démarche de Pascal.

La partie A présente le texte original de Pascal.

Les parties B et C adaptent le raisonnement de Pascal dans le langage actuel.

La partie D, enfin, donne une traduction moderne de l'énoncé de la proposition 1 de Pascal.

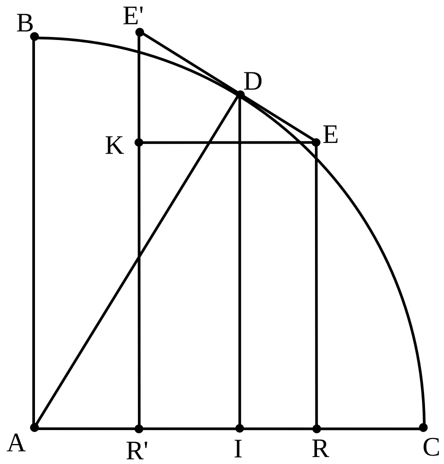
A. Texte historique

Traité des sinus du quart de cercle

Soit ABC un quart de cercle, dont le rayon AB soit considéré comme axe, et le rayon perpendiculaire AC comme base ; soit D un point quelconque dans l'arc, duquel soit mené le sinus DI[2] *sur le rayon AC ; et la touchante DE*[3]*, dans laquelle soient pris les points E où l'on voudra, d'où soient menés les perpendiculaires ER sur le rayon AC ;*

Je dis que le rectangle compris du sinus DI et de la touchante EE'[4] *est égal au rectangle compris de la portion de base (enfermée entre les parallèles) et du rayon AB*[5]*.*

Car le rayon AD est au sinus DI comme EE' à RR' ou à EK : ce qui paraît clairement à cause des triangles rectangles et semblables DIA, EKE', l'angle EE'K ou EDI étant égal à l'angle DAI .



Proposition I[6]

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes[7]*, multipliée par le rayon.*

---

[2] Ce que Pascal nomme « *le sinus DI* » n'est autre que le segment [DI]. La longueur de ce segment n'est d'ailleurs pas égale au sinus de l'angle IAD, mais à AB. sin(IAD) ; le mot « *sinus* » avait au XVII^e^ siècle un sens légèrement différent du nôtre

[3] La « *touchante DE* » est la tangente au quart de cercle en D.

[4] La « *touchante EE'* » désigne ici la longueur EE' du segment [EE'] de la tangente (EE').

[5] Cette phrase peut se résumer par l'égalité : DI . EE' = AB . RR'; mais Pascal utilise un vocabulaire très géométrique.

[6] « Proposition » a ici, comme encore souvent de nos jours en mathématiques, le sens de « théorème ».

[7] « *la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes* » désigne la distance AO.

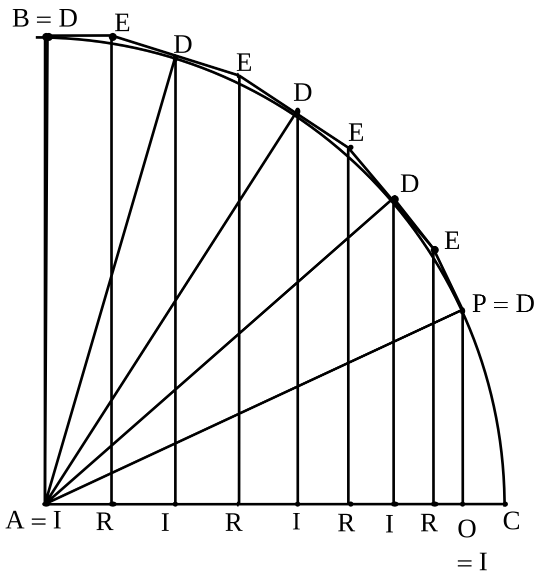
Préparation à la démonstration

Soit un arc quelconque BP divisé en un nombre indéfini de parties aux points D, d'où soient menés les sinus PO, DI, etc. (...)

Démonstration de la proposition I

Je dis que la somme des sinus DI (multipliés chacun par un des arcs égaux DD, comme cela s'entend de soi-même) est égale à la droite AO multipliée par le rayon AB.

Car en menant de tous les points D les touchantes DE, dont chacune coupe sa voisine au point E, et ramenant les perpendiculaires ER, il est visible que chaque sinus DI, multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR, multipliée par le rayon AB



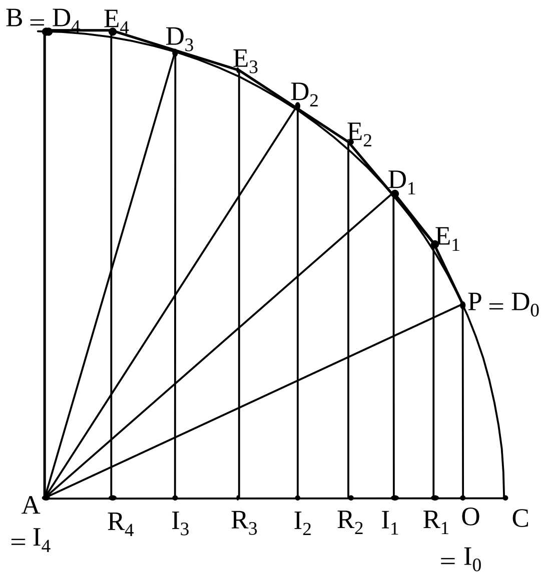
Donc tous les rectangles ensemble des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble faits de toutes les portions RR multipliées par AB ; c'est-à-dire (puisqu'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus, et que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus DI, multipliés chacun par une des touchantes EE, est égale à la somme des distances RR, soit à AO multipliée par AB.

Mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD. Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux est égale à la distance AO, multipliée par le rayon.

Avertissement

Quand j'ai dit que toutes les distances ensemble RR sont égales à AO, et de même que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude des sinus est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles EE ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée: non plus que la somme des RR de l'entière AO. (...)

B. Transcription moderne de la démarche de Pascal à propos de la Proposition I.



Dans sa « *préparation de démonstration* », Pascal « *divise l'arc BP en un nombre indéfini de parties aux points D* ». On dirait aujourd'hui que l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{BP}}$ est divisé en n arcs de même longueur : $\overset{\frown}{\mathrm{D_0D_1}}, \overset{\frown}{\mathrm{D_1D_2}}, \overset{\frown}{\mathrm{D_2D_3}}, \ldots, \overset{\frown}{\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{D}_n}$ avec $\mathrm{D}_0 = \mathrm{P}$ et $\mathrm{D}_n = \mathrm{B}$.

Chaque point D_k a pour projeté orthogonal sur la droite (AC) le point I_k.

Le point d'intersection de deux tangentes successives au cercles, menées par D_{k-1} et D_k, est noté E_k $(1 \leq k \leq n)$ et on pose $\mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{B}$.

Le projeté orthogonal de E_k sur (AC) est noté R_k $(1 \leq k \leq n)$ et on pose $\mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{A}$.

Pascal démontre d'abord que, pour tout entier naturel k compris entre 1 et $n - 1$:

$\mathrm{D}_k\mathrm{I}_k \,.\, \mathrm{E}_k\mathrm{E}_{k+1} = \mathrm{AB} \,.\, \mathrm{R}_k\mathrm{R}_{k+1}$. (1)

Puis Pascal introduit le nombre égal à « *tous les rectangles ensemble des sinus DI, multipliés chacun par sa touchante EE* ».

Pour suivre son idée, on note s la somme $s = \mathrm{D_1I_1.E_1E_2} + \mathrm{D_2I_2\,.E_2E_3} + \ldots + \mathrm{D}_n\mathrm{I}_n\,.\mathrm{E}_n\mathrm{E}_{n+1}$.

On montre que $s = \mathrm{R_1A} \,.\, \mathrm{AB}$. (2) .

Lorsque le nombre de subdivisions n de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{PB}}$ tend vers $+\infty$, s tend vers $\mathrm{AO} \,.\, \mathrm{AB}$. (3)

Mais Pascal s'intéresse en fait à la limite quand n tend vers $+\infty$ de la somme s' suivante :

$s' = \mathrm{D_1I_1} \cdot \mathrm{long}\,\overset{\frown}{\mathrm{D_0D_1}} + \mathrm{D_2I_2} \cdot \mathrm{long}\,\overset{\frown}{\mathrm{D_1D_2}} + \ldots + \mathrm{D}_n\mathrm{I}_n \cdot \mathrm{long}\,\overset{\frown}{\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{D}_n}$ où $\mathrm{long}\,\overset{\frown}{\mathrm{D}_i\,\mathrm{D}_{i+1}}$ désigne la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{D}_i\,\mathrm{D}_{i+1}}$.

Pascal admet que cette dernière limite est égale à celle de s, lorsque n tend vers $+\infty$. (4)

Conclusion : La limite de la somme s' lorsque n tend vers $+\infty$ vaut : $\mathrm{AO} \,.\, \mathrm{AB}$.

C. Questions sur la démarche de Pascal

1. Énoncer le lemme en langage moderne et le démontrer.

2. a. Démontrer l'affirmation (1) pour $1 \leq k \leq n - 1$ et aussi pour $k = n$.
   b. Démontrer alors l'affirmation (2).

3. Expliquer par des considérations géométriques pourquoi les affirmations (3) et (4) semblent valables.

4. On a ici exprimé les affirmations (3) et (4) grâce au vocabulaire actuel des limites, dont ne disposait pas Pascal. Relever dans l'*Avertissement* les expressions grâce auxquelles Pascal évoque l'idée du passage à la limite.

D. Transcription moderne de l'énoncé de la proposition I :
« Un calcul d'intégrale par la méthode des rectangles »

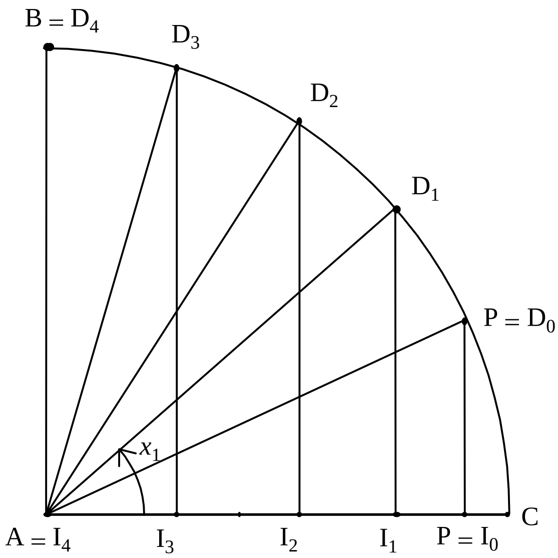
1. Pascal a donc calculé dans ce texte la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme

$$s' = D_1I_1 \cdot \text{long}\,\overparen{D_0D_1} + D_2I_2 \cdot \text{long}\,\overparen{D_1D_2} + \ldots + D_nI_n \cdot \text{long}\,\overparen{D_{n-1}D_n}$$

Dans l'énoncé du théorème, il dénomme cette limite « *Somme des sinus* » de l'arc $\overparen{BP}$.

Nous allons montrer qu'il s'agit en fait d'une intégrale.

Pour simplifier, on se place désormais dans le cas particulier où le rayon AB du cercle vaut l'unité.



On note $p = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n = \frac{\pi}{2}$ les longueurs respectives des arcs $\overparen{CP}, \overparen{CD_1}, \overparen{CD_2}, \ldots, \overparen{CD_n}$.

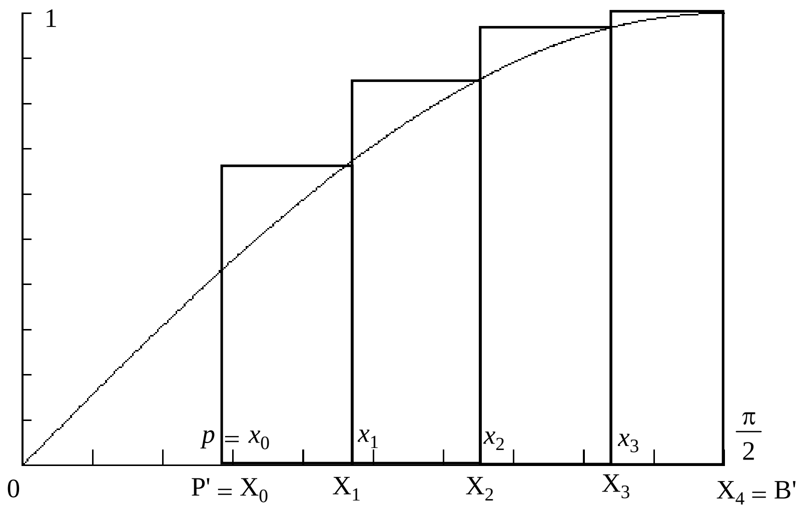
Démontrer que :

$$s' = \text{long}\,\overparen{D_0D_1} \cdot \sin(x_1) + \text{long}\,\overparen{D_1D_2} \cdot \sin(x_2) + \ldots + \text{long}\,\overparen{D_{n-1}D_n} \cdot \sin(x_n)$$

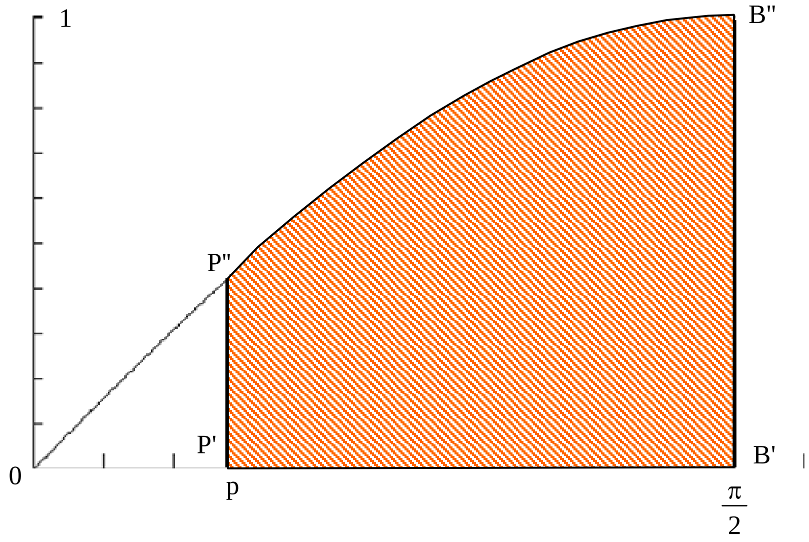
2. On considère maintenant la courbe représentative de la fonction sinus dans un repère orthonormal, puis les points $P' = X_0$, X_1, X_2, ... , X_n de l'axe des abscisses, d'abscisses respectives $p = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n = \frac{\pi}{2}$ (voir la figure ci-dessous).

   a. Vérifier que s' apparaît alors comme la somme des aires des rectangles dessinés sur la figure dans le cas où $n = 4$.

   b. Expliquer pourquoi, lorsque n, nombre de points de la subdivision, tend vers $+\infty$, la somme s' des aires des rectangles semble tendre vers l'aire a de la portion de plan P'P"B"B' comprise entre (Ox) et la sinusoïde d'une part, et entre les droites d'équations $x = p$ et $x = \frac{\pi}{2}$, d'autre part.



La « *somme des sinus* » dont parle Pascal, qui est la limite de s', peut donc être interprétée graphiquement comme étant égale à l'aire a, c'est-à-dire encore comme l'intégrale $\int_p^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ .D'ailleurs le signe $\int$ d'intégration, qui se lit « intégrale » ou « somme », dû à Leibniz, est une déformation de « S » initiale du mot « somme ».



c. Dans le cas où $\mathrm{AB} = 1$, vérifier que le résultat de Pascal se traduit par :

$$\int_p^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = \cos(p)$$

Vérifier ce résultat à l'aide d'un calcul intégral.