L'IMAGE DU PRODUIT

Objectif	*Caractériser les solutions d'une équation fonctionnelle classique.*
Outils	*Dérivabilité. Dérivabilité de la fonction composée. Notion de primitive.*

Caractériser les fonctions vérifiant la relation $f(xy) = f(x) + f(y)$.

A. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et vérifiant : « pour tous réels x et y, $f(xy) = f(x) + f(y)$ ».
Montrer que $f(0) = 0$ et que f est la fonction nulle.

B. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0 + \infty[$ et vérifiant : « pour tous réels x et y, $f(xy) = f(x) + f(y)$ ».

1. Montrer que $f(1) = 0$.
2. Soit $y \in]0 + \infty[$, y fixé.
   Montrer que les fonctions $h : x \mapsto f(x) + f(y)$ et $g : x \mapsto f(xy)$ sont dérivables sur $]0 + \infty[$ et que, pour tout $x \in]0 + \infty[$, $y f'(xy) = f'(x)$.
3. En déduire que, pour tout $y \in]0 + \infty[$, $f'(y) = \dfrac{f'(1)}{y}$ (prendre $x = 1$).

Conclusion : En posant $k = f'(1)$, on a : pour tout $y \in]0 + \infty[$, $f'(y) = \dfrac{k}{y}$. Autrement dit, f est la primitive sur $]0 + \infty[$ de la fonction $y \mapsto \dfrac{k}{y}$ qui s'annule en 1.

C. Réciproquement, soit k un réel et f une fonction définie et dérivable sur $]0 + \infty[$ telle que $f(1) = 0$ et, pour tout $x \in]0 + \infty[$, $f'(x) = \dfrac{k}{x}$.

1. Soit $y \in]0 + \infty[$, y fixé. Montrer que les fonctions f et $h : x \mapsto f(xy)$ ont la même dérivée.
2. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \in]0 + \infty[$, $f(xy) = f(x) + C$.
3. Montrer que $C = f(y)$.

Conclusion : La primitive, sur $]0 + \infty[$, de $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ qui s'annule en 1 vérifie : pour tous réels x et y de $]0 + \infty[$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.