MÉTHODES POUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES (1)

Objectif	*Dégager quelques méthodes de résolution d'équations fonctionnelles*
Notions utilisées	*Raisonnement par récurrence. Limites. Dérivées.*

On appelle *équation fonctionnelle* une égalité mettant en jeu une fonction f, appartenant à un ensemble donné F de fonctions ainsi qu'une ou plusieurs variables, appartenant à des ensembles qui sont spécifiés.

Résoudre cette équation fonctionnelle, c'est trouver l'ensemble S des fonctions f éléments de F telles que l'égalité soit vérifiée pour toutes les valeurs des variables appartenant aux ensembles précisés par le texte.

Voici quelques exemples d'exercices sur les équations fonctionnelles :

1. Déterminer les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y, on ait $f(x+y)\ f(x-y) = f(x)^2.\ f(y)^2$.

2. Déterminer les fonctions f définies sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et à valeurs dans $[\,0\,;+\infty\,[$, vérifiant $f(2)=0$, ne s'annulant pas sur $[\,0\,;2\,[$, et telles que pour tous réels positifs x et y on ait $f(x+y) = f(\,x\,f(y)\,)$.

3. Déterminer les fonctions f définie et continues sur **R**3 telles que pour tous réels x et y, on ait $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Les équations fonctionnelles sont très diverses, et la méthode de résolution du problème 1 est très différente de celle du problème 2. Quant au problème 3, les mathématiciens se sont rendus compte qu'il ne peut pas être résolu de façon vraiment satisfaisante. Ceci montre bien qu'une équation fonctionnelle peut être de résolution très difficile !

Le problème 3 admet en revanche un ensemble de solutions simples si on ne cherche que les fonctions *continues* vérifiant l'équation fonctionnelle. On voit par là le rôle important que peuvent jouer les hypothèses sur f.

Il y a aussi des équations fonctionnelles mettant en jeu la dérivée première de f, ou ses dérivées première et seconde, voire d'ordre supérieur… (exemple : $f'' = -4f$). On les appelle alors équations *différentielles*. Une équation fonctionnelle peut aussi faire intervenir une intégrale de f, et elle est alors nommée équation *intégrale*.

Sont exposées ci-dessous divers exemples de résolution d'équations fonctionnelles, mettant en jeu diverses méthodes. Par contre les équations différentielles et intégrales ne sont pas abordées ici.

ILLUSTRATION

Résolution d'équations fonctionnelles par A. -L. Cauchy, dans son ouvrage « Analyse Algébrique », datant de 1821. (Cité dans « Mathématiques au Fil des Âges », IREM, sous la direction de Jean Dhombres, chez Gauthier-Villars.

98

COURS D'ANALYSE

CHAPITRE V

DÉTERMINATION DES FONCTIONS CONTINUES D'UNE VARIABLE PROPRES À VÉRIFIER CERTAINES CONDITIONS.

§ I. — Recherche d'une fonction continue formée de telle manière que deux semblables fonctions de quantités variables, étant ajoutées ou multipliées entre elles, donnent pour somme ou pour produit une fonction semblable de la somme ou du produit de ces variables.

Lorsque, au lieu de fonctions entières, on conçoit des fonctions quelconques, dont on laisse la forme entièrement arbitraire, on ne peut plus réussir à les déterminer d'après un certain nombre de valeurs particulières, quelque grand que soit ce même nombre ; mais on y parvient quelquefois dans le cas où l'on suppose connues certaines propriétés générales de ces fonctions. Par exemple, une fonction continue de x, représentée par $\Phi(x)$, peut être complètement déterminée lorsqu'elle est assujettie à vérifier, pour toutes les valeurs possibles des variables x et y, l'une des équations

$$(1)\quad \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$$

$$(2)\quad \Phi(x+y) = \Phi(x) \times \Phi(y)$$

ou bien, pour toutes les valeurs réelles et positives des mêmes variables, l'une des équations suivantes :

$$(3)\quad \Phi(x\,y) = \Phi(x) + \Phi(y)$$

$$(4)\quad \Phi(x\,y) = \Phi(x) \times \Phi(y)$$

La résolution de ces quatre équations pose quatre problèmes différents que nous allons traiter l'un après l'autre.

A. EXPLOITATIONS D'UNE LIMITE

Exercice 1 : Fonctions périodiques

Soit T un nombre réel non nul. On note P l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ et vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle : $f(x+T) = f(x)$. On note Q l'ensemble des fonctions f éléments de P et de plus **admettant une limite finie en $+\infty$.**

1. Définir deux fonctions non constantes éléments de P.

2. Soit f une fonction élément de P.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel x $f(x+n.T) = f(x)$.

   Démontrer que l'on a également $f(x-n.T) = f(x)$.

3. Déduire de la question précédente que Q est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbf{R}$ (on pourra distinguer les cas $T > 0$ et $T < 0$).

Exercice 2

Soit K un nombre réel différent de 0, de 1 et de -1. On note S_0 l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle $f(Kx) = f(x)$, **et admettant une limite finie en zéro**.

1. Soit f une fonction élément de S_0.

   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et, pour tout réel x, $f(K^n.x) = f(x)$. Démontrer que l'on a également $f(K^{-n}\,x) = f(x)$.

2. Démontrer que S_0 est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbf{R}^*$ (on pourra distinguer les cas $K > 1$ et $K < 1$).

B. MÉTHODE DU « CHANGEMENT DE FONCTION »

Cette méthode consiste, à partir d'une fonction inconnue dans une équation fonctionnelle (E), à construire une nouvelle fonction qui se trouve alors solution d'une nouvelle équation fonctionnelle (E'), plus aisée à résoudre.

Exercice 1

Soit K un nombre réel différent de 0, de 1 et de -1 ; soit p un entier relatif. On note S_p l'ensemble des fonctions g définies sur $\mathbf{R}^*$, vérifiant pour tout réel x non nul l'équation fonctionnelle $g(Kx) = K^p \cdot g(x)$, et telles que la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^p}$ admette une limite finie en 0.

1. Soit g une fonction élément de S_p.

   Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^p}$ est élément de S_0.

2. Grâce à la conclusion de l'exercice 2, en déduire toutes les fonctions g éléments de l'ensemble S_p.

Exercice 2

On note S l'ensemble des fonctions h définies sur $\mathbf{R}$, **dérivables en 1**, et vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle $h(x^2) = 2\,h(x)$. Soit h une fonction élément de l'ensemble S.

1. Déterminer $h(1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R^*}$ par $g(x) = h(e^x)$.
   Trouver une équation fonctionnelle vérifiée par g.
   Démontrer que $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{h(e^x) - h(1)}{e^x - 1} \cdot \dfrac{e^x - 1}{x}$ et en déduire que cette expression admet une limite finie lorsque x tend vers 0.
   En déduire que g appartient à l'ensemble S_1 défini dans l'exercice 1, pour une valeur de K égale à 2.
3. Grâce au résultat démontré dans l'exercice 1, déterminer l'ensemble S.

Exercice 3

On note S l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, vérifiant pour tout réel x l'équation fonctionnelle $f(3x) = 9f(x) + x^3$, et de plus, telles que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x^2}$, admet une limite en 0.

1. Démontrer que toute fonction élément de S s'annule en zéro.
2. Démontrer qu'il existe une fonction φ élément de S de la forme $\varphi : x \mapsto ax^3$, où a est un nombre réel que l'on déterminera.
3. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. On note h la fonction définie sur $\mathbf{R^*}$ par $h(x) = f(x) - \varphi(x)$. Démontrer que f est élément de S si et seulement si h est élément de l'ensemble S_2 défini dans l'exercice 1, pour une valeur de K égale à 3.
4. En déduire tous les éléments de l'ensemble S.
5. Déterminer la fonction f élément de S et vérifiant de plus $f(1) = 1$.

D'autres exemples et d'autres méthodes de résolution sont proposées dans le chapitre suivant

Sujet d'étude (Olympiades internationales 1983)

Déterminer toutes les fonctions f de $]\,0\,;+\infty\,[$ dans lui-même qui vérifient les conditions suivantes :

(1) Pour tous réels strictement positifs x et y : $f(x\,f(y)) = y\,f(x)$

(2) La limite de f en $+\infty$ est égale à zéro.

On pourra, si on le souhaite, chercher à partir de ce seul texte, sans lire les indications qui suivent.
Si on « sèche » trop, ou si on est impatient, on lira les indications ci-dessous.

INDICATIONS

• Démontrer que pour tout réel strictement positif x, le réel $x\,f(x)$ est invariant par f (c'est-à-dire que si l'on note ce réel y, on a $f(y) = y$).

• Soit y un réel invariant par f. Démontrer que pour tout réel x : $f(y.x) = y.\,f(x)$.

En déduire que f(1) = 1 puis que $\dfrac{1}{y}$ et y^n (où $n \in \mathbf{Z}$) sont invariants, et, en exploitant la limite, que y ne peut être ni strictement supérieur à 1, ni strictement inférieur à 1.

• Conclure.