# MÉTHODES POUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES (2)

| | |
|---|---|
| ***Objectif*** | *Dégager quelques méthodes de résolution d'équations fonctionnelles* |
| ***Notions utilisées*** | *Raisonnement par récurrence. Fonction exponentielle.* |

Cette séquence présente, dans la continuité de la séquence précédente, d'autres méthodes de résolution d'équations fonctionnelles

## A. DÉTERMINATION DE LA FONCTION SUR $\mathbf{Q}$, PUIS SUR $\mathbf{R}$

### Exercice 1

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f$ définies sur $\mathbf{R}$, continues sur $\mathbf{R}$ et vérifiant, pour tout réel $x$, l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Soit $f$ une fonction remplissant ces conditions. Soit $x$ un nombre réel quelconque.

1. a. Démontrer que $f(0) = 0$ et que $f(-x) = -f(x)$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $f(n.x) = n.f(x)$

   c. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $f(-n.x) = -n.f(x)$.

   On a donc, pour tout entier relatif $k$, $f(k.x) = k.f(x)$.

   d. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul $p$, $f\left(\frac{1}{p}x\right) = \frac{1}{p}f(x)$.

   e. Démontrer que, pour tout nombre rationnel $q$, $f(q.x) = q.f(x)$.

   On pose : $f(1) = \lambda$. Démontrer que, pour tout nombre rationnel $q$, $f(q) = \lambda\, q$.

2. On admet que tout nombre réel $x$ est la limite d'une suite de nombres rationnels[1].

   Démontrer que, pour tout réel $x$, on a $f(x) = \lambda\, x$ (on pourra poser : $x = \lim q_n$ , où, pour tout entier naturel $n$, $q_n$ est un nombre rationnel).

   Quelles sont les fonctions $f$ vérifiant les conditions énoncées ?

[1] Par exemple, on peut considérer la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $u_n$ étant le nombre décimal (donc rationnel) formé des chiffres de l'écriture décimale de $x$, <u>jusqu'au n-ième chiffre après la virgule seulement</u>. La suite $(u_n)$ est alors une suite de nombres rationnels admettant $x$ pour limite.

## Exercice 2

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f$ définies sur $\mathbf{R}$, continues sur $\mathbf{R}$, vérifiant pour tout réel $x$ l'équation fonctionnelle : $f(x+y).\,f(x-y) = (f(x).\,f(y))^2$.

Soit $f$ une fonction remplissant ces conditions.

1. a. Montrer que $f(0) \in \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$.
   b. Montrer que $f(0).f(2x) = [\,f(x)\,]^4$.
   En déduire que, si $f(0) = 0$, alors $f$ est la fonction nulle.
   c. Montrer que, pour tout réel $x$, $f(0)f(x) = \left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^4$
   En déduire que, pour tout réel $x$, $f(x)$ est du signe de $f(0)$.

2. On suppose que $f(0) \neq 0$.
   On veut montrer, en raisonnant par l'absurde, que, pour tout réel $x$, $f(x) \neq 0$.
   Supposons qu'il existe un réel non nul $x_0$ tel que $f(x_0) = 0$.
   Montrer que, quel que soit l'entier naturel $n$, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 0$ et en déduire $f(0)$.
   Conclure.

3. On suppose que $f(0) = 1$.
   a. Montrer que $f(1)$ est un nombre strictement positif $A$.
   b. Montrer que $f$ est une fonction paire.
   c. Déterminer $f(2)$, puis $f(3)$ en fonction de $A$ et prouver par récurrence que pour, tout entier naturel $n$, $f(n) = A^{(n^2)}$.
   d. Soit $x$ un nombre réel quelconque.
   Grâce à un raisonnement par récurrence analogue, démontrer que pour tout entier naturel $p$ : $f(px) = f(x)^{(p^2)}$.
   e. En posant $x = \dfrac{1}{p}$ dans l'égalité précédente, démontrer que pour tout entier naturel non nul $p$ et tout entier naturel $n$ : $f\left(\dfrac{n}{p}\right) = A^{\left(\frac{n}{p}\right)^2}$.
   f. Démontrer que, pour tout rationnel $q$, $f(q) = A^{(q^2)}$.
   g. En déduire que, pour tout réel $x$, $f(x) = A^{(x^2)}$. (On pourra poser $x = \lim q^n$ où, pour tout entier naturel $n$, $q^n$ est rationnel).
   h. Réciproquement, vérifier que toute fonction de cette forme vérifie bien les conditions posées au départ.

4. Étudier le cas où $f(0) = -1$. (On pourra considérer que $g = -f$)

## B. MÉTHODES DIVERSES

### Exercice 1. Exploitation d'une dérivabilité

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f$ à valeurs réelles, définies sur $]\,0\,;+\infty\,[$, vérifiant, pour tout réel $x$, l'équation fonctionnelle : $f(x.y) = f(x) + f(y)$, et qui soient de plus dérivables en $1$.

Soit $f$ une fonction remplissant ces conditions.

1. Démontrer que $f(1) = 0$.

2. On note $a$ le nombre $f'(1)$.

   Exprimer $a$ comme une limite, puis démontrer que $f$ est dérivable en tout réel $x$ de $]\,0\,;+\infty\,[$, et démontrer que $f'(x) = \dfrac{a}{x}$.

3. En déduire toutes les fonctions vérifiant les conditions données au départ[2].

### Exercice 2. Méthode du changement de fonction

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues sur $\mathbf{R}$, différentes de la fonction nulle, et vérifiant, pour tout réel $x$, l'équation fonctionnelle $f(x.y) = f(x).\,f(y)$. On note $S$ l'ensemble des fonctions $f$ remplissant ces conditions.

Soit $f$ une fonction élément de $S$.

1. Démontrer que $f$ ne s'annule en aucun réel $x$ non nul. (On pourra raisonner par l'absurde).

   Démontrer que $f(1) = 1$.

   Démontrer que $f(-1)$ est égal soit à $1$, soit à $(-1)$. En déduire que $f$ est soit paire, soit impaire.

   Démontrer que $f$ est strictement positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \ln(f(\mathrm{e}^x))$.

   Démontrer que $g$ est continue sur $\mathbf{R}$ et que $g$ vérifie l'équation fonctionnelle de l'exercice 1.

   En déduire, grâce à la résolution de l'exercice 1, l'expression de $g(x)$ pour $x$ réel, puis celle de $f(x)$ pour $x$ réel strictement positif.

3. Déterminer toutes les fonctions $f$ de l'ensemble $S$.

---

[2] Deux autres méthodes peuvent s'appliquer à ce même exercice :

• On peut démontrer d'abord que $f$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$, puis à se ramener par changement de fonction à l'exercice 1 ci-dessus. (Pour la méthode du changement de fonction, voir chapitre précédent).

• Une autre méthode, équivalente à la précédente, consiste, une fois établie la continuité de $f$ sur $\mathbf{R}$, à poser $f(e) = a$, puis à exprimer $f(e^z)$ en fonction de $a$ et de $z$, pour $z$ entier, puis rationnel, puis réel.

## Sujet d'étude 1. Méthode particulière (MP1, Dakar, 1971)

On se propose de déterminer l'ensemble $S$ des fonctions $f$ définies sur $\mathbf{R}$, constantes sur aucun intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et vérifiant la relation (1) : « pour tous réels $x$ et $y$, $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ ».

Soit $f$ un élément de $S$.

1. Montrer qu'il n'existe aucun réel $x$ tel que $f(x)$ soit égal à $1$ ou $-1$.
2. Montrer que $f$ prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $]-1\,;1\,[$ (on remarquera que $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)$).
3. Montrer que $f$ s'annule en $0$ et que $f$ est une fonction impaire.
4. On fait à présent l'hypothèse que $f$ est continue à droite en $0$. Montrer alors que :
   a. $f$ est continue en $0$ ;
   b. $f$ est continue sur $\mathbf{R}$.
5. On suppose à présent que $f$ est dérivable à droite en $0$.
   Montrer que $f$ est dérivable en $0$, puis que $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
   Établir une relation simple entre $f$ et sa dérivée $f'$.
6. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$. On pose $k=f(0)$
   a. Montrer que $g' = 2\,k\,g$ et que $g\,(0) = 1$.
   b. En déduire l'expression de $g\,(x)$ puis celle de $f(x)$.
   c. Déterminer toutes les fonctions $f$ de l'ensemble $S$.

## Sujet d'étude 2. Méthode particulière (Olympiades internationales 1986)

Déterminer toutes les fonctions $f$ de $[\,0\,;+\infty\,[$ dans lui-même qui vérifient les conditions suivantes :

(1) Pour tous réels positifs $x$ et $y$ : $f(y.\,f(x)).\,f(x)=f(x+y)$

(2) $f(2)=0$

(3) Pour tout réel $x$ de $[\,0\,;2\,[$, $f(x)\neq 0$.

On pourra si on le souhaite chercher à partir de ce seul texte, sans lire les indications qui suivent. Si on « sèche » trop, ou si on est impatient, on lira les indications ci-dessous.

INDICATIONS

a. Montrer que $f$ est nulle sur $[\,2\,;+\infty\,[$.
b. Déterminer $f(0)$.
c. Montrer que, si $x\in\,]\,0\,;2\,[$, $f(x)\geq\dfrac{2}{2-x}$ (on posera $y=2-x$ dans l'égalité (1)).
d. Soit $x$ élément de l'intervalle $]\,0\,;2\,[$. Démontrer qu'il existe un réel positif $z$ tel que: $x+z=zf(x)$. Démontrer que $z.\,f(x)\geq 2$ (on posera $y=z$ dans l'égalité (1)). En déduire que $f(x)\leq\dfrac{2}{2-x}$.
e. Conclure.