MOI, MON DOUBLE ET SON IMAGE

Objectif	*Utiliser la continuité et la dérivabilité pour résoudre des équations fonctionnelles*
Outils	*Continuité et dérivabilité d'une fonction en un point.* *Raisonnement par récurrence*

Il s'agit de rechercher, d'une part, les fonctions vérifiant $f(2x) = f(x)$ et, d'autre part, celles vérifiant $f(2x) = 2\ f(x)$.

A. Étude des fonctions vérifiant $f(2x) = f(x)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition : (*).quel que soit le réel x, $f(2x) = f(x)$

1. Pour cette question seulement, on suppose de plus que, quel que soit le réel x de $[\ 1\ ;\ 2\ [$, $f(x) = x$.
   a. Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{4})$, $f(\frac{1}{8})$, $f(\frac{3}{2})$, $f(\frac{3}{4})$, $f(3)$.
   b. Représenter f sur l'intervalle $[\ 1\ ;\ 2\ [$.
   En déduire la représentation de f sur les intervalles $[\ 2\ ;4\ [$; $\left[\ \frac{1}{2};1\right[$; $\left[\ \frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[$.
   c. Donner l'allure de la représentation graphique de f dans le cas où f est impaire.
   d. Calculer $f(0{,}01)$ et $f(100)$.

2. Il s'agit ici de montrer que, si on connaît f sur $[\ 1\ ;\ 2\ [$, alors on connaît f sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
   a. Montrer que, quel que soit p appartenant à $\mathbb{Z}$, $f(2^p) = f(1)$.
   b. Montrer que, quel que soit le réel x et quel que soit l'entier relatif p, $f(x) = f(2^p x)$
   c. Soit x un réel de l'intervalle $]\ 1\ ;\ +\infty\ [$ et soit p l'entier naturel tel que $2^p \le x < 2^{p+1}$
   Montrer que : $2^{-p}x$ appartient à l'intervalle $[\ 1\ ;\ 2\ [$. En déduire que $f(x)$ est connu.
   d. Étudier le cas où $x \in\ ]\ 0\ ;\ 1\ [$.

3. On suppose dans cette question que f est continue en 0.

   Montrer que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^p}\right)$.

   En déduire que $f(x) = f(0)$ pour tout réel x.
   Conclure.

B. Étude des fonctions vérifiant $f(2x) = 2f(x)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la condition : (**) quel que soit le réel x, $f(2x) = 2f(x)$

On peut remarquer que les fonctions linéaires vérifient cette relation.

1. Déterminer $f(0)$.

2. a. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $M(x ; y)$ un point de $\mathcal{C}$. Montrer que le point M', transformé de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2, est aussi sur $\mathcal{C}$.

   b. On suppose que, quel que soit $x \in [1 ; 2[$, $f(x) = 2 - x$
   Tracer alors la représentation graphique de f.

   c. On suppose que, quel que soit $x \in [1 ; 2[$, $f(x) = \dfrac{3}{5}x$.

   Tracer alors la représentation graphique de f sur $[0 ; +\infty[$.

3. On suppose maintenant que f est dérivable en 0. Montrer que :

   a. quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

   b. quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x\,\dfrac{f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)}{\frac{x}{2^n}}$.

   En déduire que, quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x f'(0)$, puis que f est linéaire.

4. Application
   Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g''(0)$ existe et vérifiant la condition :

   quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = 4g(x)$.

   a. Montrer que $g(0) = 0$.
   b. Montrer que g' vérifie la condition (**).
   c. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta$
   d. Montrer que $\beta = 0$ et donner toutes les fonctions vérifiant les conditions imposées.