MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Objectif	*Étude d'une fonction définie à partir d'une limite de suite et caractérisée par des équations fonctionnelles.*
Notions utilisées	*Le programme d'Analyse de terminale S. Existence de la limite d'une suite croissante majorée. Limite à droite. Limite à gauche.*

Étude d'une fonction définie à partir d'une limite de suite et caractérisée par des équations fonctionnelles.

Problème

1. À tout couple (a ; b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites u et v ainsi définies :

$$(1)\quad \begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbf{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases}$$

   a. Calculer u_n et v_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0$, $b \geq 0$ et $a \geq 0$, $b = 0$.

   b. Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq 1$ et que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones à partir du rang 1.

   c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite. Cette limite, qui est fonction du couple (a ; b) et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $L\,(a, b)$.

   d. Montrer que, pour $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $\lambda \geq 0$, on a :

$$(2)\quad L(a,b) = L(b,a)$$

$$(3)\quad L(\lambda a, \lambda b) = \lambda L(a,b)$$

$$(4)\quad \sqrt{ab} \leq L(a,b) \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

$$(5)\quad L(a,b) = L(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$$

2. On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction $F : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & L(1,x) \end{array}$

   a. Calculer $F\,(0)$ et $F\,(1)$.

   b. Soit x et x' deux réels positifs ou nuls tels que $x < x'$. On considère les suites u, v, u' et v' définies par les relations (1) avec $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = x \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0' = 1 \\ v_0' = x' \end{cases}$.

   Comparer, pour tout entier naturel n, d'une part u_n et u_n' et d'autre part v_n et v_n'.

En déduire que $F(x) \leq F(x')$.

Quel est le sens de variation de la fonction F ? Quel est le signe de $F(x)$?

3. En utilisant les résultats du 1.d., montrer que, pour $x > 0$, on a :

$$(6)\quad \sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1+x)$$

$$(7)\quad F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(8)\quad F(x) = \sqrt{x}\,F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$(9)\quad F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

4. a. Montrer que F est dérivable en 1 et préciser la valeur de $F'(1)$.

b. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. On étudie F au voisinage de 0.

Rappel : Toute fonction croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$ admet une limite à droite en 0.

Soit ℓ la limite à droite de F en 0. Montrer, en utilisant l'égalité (9) que $\ell = 0$

F est-elle continue en 0 ? F est-elle dérivable en 0 ?

d. Démontrer que, pour tous réels strictement positifs s et t tels que $t \leq s$, on a :

$$F(s) - F(t) = (s-t)F\left(\frac{1}{s}\right) + t\left[F\left(\frac{1}{s}\right) - F\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

puis $0 \leq F(s) - F(t) \leq (s-t)F\left(\frac{1}{s}\right) \leq (s-t)F\left(\frac{1}{t}\right)$

Soit a un réel positif. Déduire des égalités précédentes que F est continue en a.

e. Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\dfrac{F(x)}{x}$ et $\dfrac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

Interpréter graphiquement la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ en $+\infty$.

Interpréter les deux limites ci-dessus en termes de croissance comparées des fonctions F, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$.

f. Tracer dans un même repère les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}(1+x)$ et donner l'allure de la courbe représentative de F.