DU FINI À L'INFINI

Le parti pris pour définir la notion de « fini » est le point de vue naïf de l'enfant qui dénombre une collection d'objets.

Définitions

1. Deux ensembles sont dits équipotents lorsqu'il existe au moins une bijection de l'un sur l'autre.
2. Un ensemble E est dit fini lorsqu'il est vide ou lorsqu'il existe un entier naturel n tel que E soit équipotent à l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; ... ; n \}$.
3. Un ensemble est dit infini lorsqu'il n'est pas fini.
4. Un ensemble est dit dénombrable lorsqu'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

Notation

Nous noterons $[\![1 ; n]\!]$ l'ensemble $\{ 1 ; 2 ; ... ; n \}$.

Remarques

1. Soit E et F deux ensembles équipotents et f une bijection de E sur F.
   Alors f^{-1} est une bijection de F sur E.
2. Le point de vue adopté pour définir un ensemble fini est le point de vue intuitif utilisé pour dénombrer les doigts de la main gauche.
3. Les questions qui se posent à la suite de ces définitions sont les suivantes :
   - l'ensemble E étant un ensemble fini et non vide, l'entier n tel que E soit équipotent à $[\![1 ; n]\!]$ est-il unique? (ou, en langage naïf, va-t-on obtenir le même résultat en comptant les éléments de E de diverses façons ?).
   - un ensemble dénombrable est-il infini ?
   - un ensemble équipotent à un ensemble infini est-il lui même infini ?

La réponse intuitive à chacune de ces trois questions est oui. Les propriétés qui suivent, et qui découlent des définitions adoptées, en apportent la preuve mathématique.

Propriété 1

Soit deux entiers naturels non nuls n et p.

Si $[\![1 ; n]\!]$ est équipotent à $[\![1 ; p]\!]$ alors $n = p$.

Il suffit, en fait, d'établir que, si $[\![1 ; n]\!]$ est équipotent à $[\![1 ; p]\!]$, alors $n \leq p$. (1)
En effet si $[\![1 ; n]\!]$ est équipotent à $[\![1 ; p]\!]$ alors $[\![1 ; p]\!]$ est équipotent à $[\![1 ; n]\!]$. La proposition (1) permet donc d'écrire à la fois $n \leq p$ et $p \leq n$, c'est à dire que $n = p$.

Pour démontrer cette proposition (1) nous allons utiliser un raisonnement par récurrence sur l'entier n.

- La proposition est évidente pour $n = 1$ puisque $p \geq 1$.
- Supposons cette proposition vraie au rang n et considérons un entier naturel non nul q tel que $[\![1 ; (n+1)]\!]$ soit équipotent à $[\![1 ; q]\!]$.

On considère une bijection f de $[\![1 ; (n+1)]\!]$ sur $[\![1 ; q]\!]$ et on désigne par m l'image de $(n+1)$ par f.
Deux cas sont alors à envisager :

1er cas : $m = q$.
La restriction f^* de f à l'ensemble $[\![1 ; n]\!]$ est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ sur $[\![1 ; (q-1)]\!]$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n \leq q - 1$.
Par conséquent, $n + 1 \leq q$.

2ème cas : $m \neq q$

On désigne par A l'ensemble $[\![1 ; (q)]\!] \setminus \{m\}$ (ensemble $[\![1 ; (q)]\!]$ privé de l'entier m) et on considère l'application g définie sur A par :

– Si $m \neq 1$, $\begin{cases} g(x) = x \text{ pour tout } x \text{ tel que } 1 \leq x \leq m \\ g(x) = x-1 \text{ pour tout } x \text{ tel que } m \leq x \leq q \end{cases}$

– Si $m = 1$, $g(x) = x-1$ pour tout x de A

g est une bijection de A sur $[1 ; (q-1)]$ et la restriction f^* de f à l'ensemble $[\![1 ; n]\!]$ est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ sur A. Il en résulte que $g \circ f^*$ est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ sur $[1 ; (q-1)]$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n \leq q-1$.

Par conséquent, $n + 1 \leq q$ comme dans le premier cas.

Nous avons donc établi la proposition (1) au rang $(n + 1)$. Celle-ci est donc vraie pour tout entier n.

Propriété 2

Soit E un ensemble fini non vide.

Il existe un entier naturel n unique tel que E soit équipotent à $[\![1 ; n]\!]$.

Définition

Cet entier naturel n est appelé cardinal de l'ensemble E et noté $\text{Card}(E)$.

Par convention le cardinal de l'ensemble vide est 0.

L'ensemble E est fini et non vide donc il existe un entier naturel n et une bijection f de E sur $[\![1 ; n]\!]$.
Soit un entier naturel p et g une bijection de E sur $[\![1 ; p]\!]$.
L'application $g \circ f$ est une bijection de $[\![1 ; n]\!]$ sur $[\![1 ; p]\!]$ et, d'après la proposition précédente, $n = p$.

Propriété 3

Les parties finies non vides de $\mathbb{N}$ sont les parties majorées de $\mathbb{N}$.

Soit E une partie finie et non vide de $\mathbb{N}$.

Il existe un entier naturel n et une bijection f de E sur $[\![1 ; n]\!]$.
Nous allons montrer par récurrence sur l'entier n que E est majoré.

Si $n = 1$, alors $E = \{ f^{-1}(1) \}$ où f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.

Tout entier supérieur à $f^{-1}(1)$, par exemple $f^{-1}(1) + 1$, est un majorant de E.

Supposons la propriété vraie au rang n.

Soit E une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal $(n + 1)$.

L'ensemble $\{ f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(n) \}$ est une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal n et possède donc, d'après l'hypothèse de récurrence, un majorant M. Or $E = \{ f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(n), f^{-1}(n + 1) \}$.

Ainsi le plus grand des deux nombres M et $f^{-1}(n + 1)$ est un majorant de E.

La propriété est donc établie au rang $(n + 1)$ et nous avons démontré que toute partie finie de $\mathbb{N}$ est majorée.

Réciproquement, soit E une partie majorée et non vide de $\mathbb{N}$.

D'après les axiomes qui permettent de définir l'ensemble des nombres entiers naturels, E admet un plus grand élément p.
Nous allons montrer par récurrence sur l'entier p que E est fini.

Si $p = 0$, E a pour seul élément 0 et l'application qui à 0 associe 1 est une bijection de E sur $[1 ; 1]$ ce qui prouve que E est fini.

Supposons la propriété vraie au rang p.

Soit E une partie de $\mathbb{N}$ dont le plus grand élément est $(p + 1)$.

On considère l'ensemble $F = E \setminus \{ p + 1 \}$.
Le plus grand élément de F est inférieur ou égal à p et, d'après l'hypothèse de récurrence, F est fini. Donc il existe un entier naturel m et une bijection f de F sur $[\![1 ; m]\!]$.

L'application $g : \begin{cases} E \to [\![1\,;m+1]\!] \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x \text{ appartient à } F \\ p+1 \mapsto m+1 \end{cases}$ est une bijection de E sur $[\![1 \,;\, m+1]\!]$.

La propriété est donc établie au rang $(p + 1)$ et nous avons démontré que toute partie majorée de $\mathbb{N}$ est finie.

Propriété 4

Soit E un ensemble fini non vide et F une partie de E, distincte de E.

Alors F est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.

Si F est l'ensemble vide, alors $\mathrm{Card}(F) = 0$ et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.

Supposons donc F différent de l'ensemble vide.
L'ensemble E est fini et non vide donc il existe un entier naturel n et une bijection f de E sur $[\![1 \,;\, n]\!]$.
Soit f^* la restriction de f à F et A l'image de F par f^*.
L'ensemble A est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par n donc A est fini. Par suite il existe un entier naturel p et une bijection g de A sur $[\![1 \,;\, p]\!]$. Il en résulte que $h = g \circ f^*$ est une bijection de F sur $[\![1 \,;\, p]\!]$. Donc F est fini et $\mathrm{Card}(F) = p$.

L'ensemble $(E - F)$ est également une partie de E et d'après le raisonnement qui vient d'être fait, $(E - F)$ est fini. On pose $q = \mathrm{Card}(E - F)$.
Par hypothèse, $(E - F)$ est non vide donc q est un entier naturel non nul.
On appelle k une bijection de $(E - F)$ dans $[\![1 \,;\, q]\!]$.

Soit $\varphi : \begin{cases} E \to [\![1\,; p+q]\!] \\ x \mapsto h(x) \text{ si } x \text{ appartient à } F \\ x \mapsto p + k(x) \text{ si } x \text{ appartient à } (E-F) \end{cases}$.

φ est une bijection de E dans $[\![1 \,;\, p + q]\!]$ car h et k sont des bijections. Par conséquent, $p + q = n$.
Donc $p < n$ et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.

Propriété 5

Tout ensemble équipotent à l'une de ses parties strictes est infini.

(F est une partie stricte de E lorsque F est un sous ensemble de E, distinct de E).

Soit E un ensemble, F une de ses parties strictes et f une bijection de E sur F.
Nous allons démontrer que E est un ensemble infini à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Supposons donc E fini.
D'après la proposition précédente F est fini et $\mathrm{Card}(F) < \mathrm{Card}(E)$.
Il existe un entier naturel n et une bijection g de E sur $[\![1 \,;\, n]\!]$, un entier naturel p et une bijection h de F sur $[\![1 \,;\, p]\!]$.
L'application $h \circ f \circ g^{-1}$ est une bijection de $[\![1 \,;\, n]\!]$ dans $[\![1 \,;\, p]\!]$, d'où $n = p$ et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, d'où la contradiction.

Propriété 6

Tout ensemble équipotent à un ensemble infini est infini.

Cette proposition se démontre aisément à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.