Intérêts simples et proportionnels - Intérêts composés et équivalents

Programmes de terminale : Information chiffrée et suites numériques/suites numériques/comparaisons de suites - page 2

Deux modes de calculs d'intérêts : les intérêts simples et les intérêts composés

Les intérêts simples

Ils sont proportionnels à la durée de placement :

Si $\boldsymbol{t}$ désigne le taux de placement sur une période, l'intérêt à l'issue de $\boldsymbol{n}$ périodes est $\boldsymbol{C_0 \times t \times n}$,
la valeur acquise à l'issue de $\boldsymbol{n}$ périodes est $\boldsymbol{C_0\ (1 + t\,n)}$, C_0 étant le capital initial.

Ce mode de calcul d'intérêt concerne les placements à court terme (c'est-à-dire inférieurs à un an), les prêts de courte durée, le calcul des agios.

Deux taux sont **proportionnels** s'ils donnent la même valeur acquise à partir du même capital initial, au bout de la même durée de placement à intérêts simples.

Les taux les plus utilisés :

$$t_{\text{semestriel}} = \frac{1}{2}\, t_{\text{annuel}}$$

$$t_{\text{trimestriel}} = \frac{1}{4}\, t_{\text{annuel}}$$

$$t_{\text{mensuel}} = \frac{1}{12}\, t_{\text{annuel}}$$

$$t_{\text{journalier}} = \frac{1}{360}\, t_{\text{annuel}} \qquad \text{(année financière)}$$

$$t_{\text{journalier}} = \frac{1}{365}\, t_{\text{annuel}} \ \text{ ou } \ t_{\text{journalier}} = \frac{1}{366}\, t_{\text{annuel}} \quad \text{(année civile)}$$

Les intérêts composés

Si t désigne le taux de placement sur une période,

la valeur acquise C_n à l'issue de n périodes est $C_n = C_0 (1 + t)^n$, C_0 étant le capital initial.

La valeur actuelle C_0 est la somme qu'il faut placer au taux t pendant n périodes pour obtenir la valeur C_n : $C_0 = C_n (1 + t)^{-n}$.

L'actualisation consiste à exprimer la valeur à une date 0 d'une somme payable ou encaissable dans le futur.

Le taux est alors nommé **taux d'actualisation.**

Évaluation d'un capital à une date quelconque

p périodes		n périodes	
Valeur actuelle $C (1 + t)^{-p}$	Capital C		Valeur acquise $C (1 + t)^{n}$

Deux taux sont **équivalents** s'ils donnent la même valeur acquise à partir du même capital initial, au bout de la même durée de placement à intérêts composés.

Les taux les plus utilisés :

$$1 + t_{\text{semestriel}} = (1 + t_{\text{annuel}})^{\frac{1}{2}}$$

$$1 + t_{\text{trimestriel}} = (1 + t_{\text{annuel}})^{\frac{1}{4}}$$

$$1 + t_{\text{mensuel}} = (1 + t_{\text{annuel}})^{\frac{1}{12}}$$

Exemples

Les différents exercices ci-dessous soulignent la nécessité de bien préciser la situation : taux annuel, capitalisation des intérêts en fin de période, année civile ou bancaire…

Les deux premiers suscitent quelques questions :

- Les modes de calcul proposés correspondent-ils aux pratiques bancaires ? Aux méthodes de calculs enseignées en économie-gestion ?
- Les élèves connaissent-ils et ont-ils à connaître ces modalités de calcul ?

Le cours de mathématiques ne devient pas un cours de gestion et de mathématiques financières ; le professeur de mathématiques ne peut donc pas avoir d'exigences sur les modalités de calcul appliquées ici. Il semble que chaque banque ait son propre mode de calcul ; cependant l'intérêt de tels exercices est, en travaillant sur plusieurs modèles, de permettre aux élèves de mieux s'adapter aux situations nouvelles et variées qu'ils rencontreront.

1. Le compte courant de M. X a enregistré durant le mois de septembre, un solde débiteur moyen de 700 €. Le taux annuel du découvert pratiqué par sa banque est 13,75 %.
   Calculer le coût de ce découvert.

$$\text{Agios} = \frac{\text{montant du découvert} \times \text{taux} \times \text{nombre de jours}}{360}$$

$$\text{Le coût est donc } \frac{700 \times 0{,}1375 \times 30}{360} \text{ soit } 8{,}02\ €.$$

   À ce montant d'agios s'ajoute une commission de 0,05 % qui s'applique sur le solde débiteur mensuel le plus élevé ; supposons que le découvert maximal de M.X soit de 880 € pendant cinq jours.
   La commission s'élève à $0{,}005 \times 880 \approx 0{,}44$ €.

2. Quelle est la valeur acquise par un capital de 4 500 € placé à intérêts composés pendant 3 ans et 7 mois au taux annuel de 4,5 % ?
   Deux possibilités de calcul :

   La solution rationnelle : on considère que le capital est placé à intérêts composés sur un nombre entier de périodes, puis à intérêts simples sur la fraction de période excédentaire ;

   La valeur acquise au bout de 3 ans est $C_3 = 4\,500 \times 1,045^{\,3}$ €, soit $C_3 \approx 5\,135{,}25$ €.
   Cette somme est ensuite placée à intérêts simples pendant 7 mois,

   l'intérêt produit est $I = \dfrac{C_3 \times 0{,}045 \times 7}{12}$ $\quad I \approx 134{,}80$ €.

   La valeur acquise au bout de 3 ans et 7 mois est donc 5 270,05 €.

   La solution commerciale : on considère que le placement est entièrement effectué à intérêts composés.

   Le taux mensuel équivalent est $t_{\text{mensuel}} = (1{,}045)^{\frac{1}{12}}$

   La valeur acquise au bout de 3 ans et 7 mois, soit 43 mois, est donc :

$$4\,500 \times 1{,}045^{\frac{43}{12}} \qquad \text{soit} \qquad 5\,268{,}81\ €.$$

3. Quel est l'intérêt acquis par un capital de 8 560 € placé à intérêt simple au taux de 7 % annuel pendant 99 jours ? (Année bancaire).

$$I = \frac{C_0 \times t \times n}{360} \quad \text{soit} \quad I = 164{,}78 \text{ €}$$

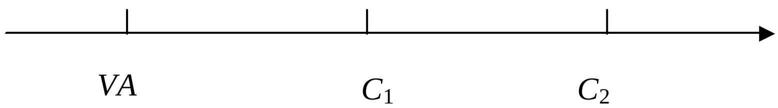
4. Calculer la valeur acquise d'un placement à intérêts simples de 12 500 € pendant 9 mois au taux annuel de 6,5 %.

$$C = C_0\left(1 + \frac{t \times n}{12}\right) \quad \text{soit} \quad C = 12\,500\left(1 + \frac{0{,}065 \times 9}{12}\right) \quad \text{et donc} \quad C = 13\,109{,}37 \text{ €}$$

5. En combien de jours un capital de 24 800 € placé à intérêts simples au taux annuel de 3,5 % rapporte-t-il un intérêt de 171,5 € ? (Année civile).

$$\mathrm{I} = \frac{24800 \times 0{,}035 \times n}{365} \quad \text{d'où} \quad n = 73$$

6. Un débiteur doit régler à sa banque une somme de 10 000 € dans un an au taux d'actualisation de 6 %.
Il demande à sa banque de proroger l'échéance afin de ne régler que dans 2 ans.
La banque accepte moyennant rémunération au taux de 7 %. Quel est le montant de la nouvelle échéance ?



Les valeurs actuelles des deux capitaux doivent être égales :

$$VA = C_1 \times 1{,}06^{-1} = C_2 \times 1{,}07^{-2} \quad \text{d'où} \quad C_2 = C_1 \times \frac{1{,}07}{1{,}06} \quad \text{soit } C_2 = 10\,994{,}34 \text{ €.}$$

7. Un débiteur doit s'acquitter d'une dette de 8 000 € dans 4 ans.
Quelle somme devra-t-il payer, s'il préfère régler sa dette dans 2 ans ? dans 5 ans ?
Le créancier et le débiteur ont convenu d'un taux d'actualisation de 7,25 %.

$C_2 = C_4\,(1 + \mathrm{t})^{-2}$ donc $C_2 \approx 6\,954{,}97$ €.

$C_5 = C_4\,(1 + \mathrm{t})$ donc $C_5 = 8\,580$ €.