ministère
éducation
nationale
enseignement
supérieur
recherche

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Exercices pour la spécialité mathématiques de la série L

La publication d'une « banque d'exercices pouvant servir d'exemples pour la confection de sujets de baccalauréat pour la spécialité mathématiques de la série L », s'inscrit dans l'évolution des programmes de cette série et prend en compte la nouvelle définition de l'épreuve, appliquée depuis la session 2005 (note de service n° 2004-121 du 15-07-2004, parue au B.O. n° 30 du 29 juillet 2004). Les nouveaux programmes, mis en place en première à la rentrée 2005 et en terminale à la rentrée 2006, sont caractérisés par une place importante accordée à l'arithmétique, la confirmation d'un programme de géométrie dans l'espace (perspective parallèle et perspective centrale), le développement de compétences transversales autour de la logique et de l'algorithmique. Dans la continuité de l'enseignement de mathématiques et informatique de première L, l'usage d'un tableur-grapheur est préconisé tout au long du programme.

Il a semblé nécessaire de préparer les enseignants et les élèves à l'évolution des sujets consécutive à ces modifications. Le groupe des mathématiques de l'inspection générale de l'éducation nationale a donc demandé à des professeurs de toutes les académies, qui ont travaillé en étroite collaboration avec les IA-IPR de mathématiques, de proposer des exemples. De leur travail sont issus les exercices proposés ici : que tous ceux qui ont collaboré à cette entreprise en soient remerciés !

Tout d'abord une remarque de bon sens : pour une part importante, les exercices posés au baccalauréat les années précédentes ou dans d'autres séries sont compatibles avec la nouvelle définition d'épreuve (notation de 3 à 10 points) et ont un contenu conforme aux nouveaux programmes. Ces exercices « classiques » figurent dans des annales et constituent naturellement des exemples pour la confection des sujets. Ils n'apparaissent donc qu'en nombre restreint dans la présente liste où nous avons souhaité présenter plutôt des exercices novateurs soit par la forme (référence à un modèle, questionnaire à choix multiple, valorisation du graphique, ...), soit par le fond (en raison des nouveaux programmes).

Les énoncés figurant dans cette « banque d'exercices » ont été élaborés avec soin. Néanmoins, ils n'ont pas suivi la procédure habituelle des sujets de baccalauréat (essais, validation en commission de choix de sujets, signature par un universitaire et par un inspecteur général sous la responsabilité d'un recteur) : ils n'ont donc pas toujours la forme des énoncés entrant dans la composition d'un sujet de baccalauréat. Nous avons inclu dans la liste quelques exercices « étoilés » destinés à servir d'exemples dans un processus de formation (travail dirigé en classe, devoir à la maison). Ils ne correspondent pas aux objectifs fixés pour une évaluation au baccalauréat.

Le groupe des mathématiques de
l'inspection générale de l'éducation nationale

Exercice n° 1

Pour chacune des cinq propositions suivantes, dire, en justifiant la réponse, si elle est vraie ou si elle est fausse.

1. Pour tous entiers a et r,
$$\text{si } a \equiv r \pmod 5 \text{ alors } a + 10 \equiv r \pmod 5\ .$$
2. Pour tous entiers a et r,
$$\text{si } a \equiv r \pmod 5 \text{ alors } 2 \times a \equiv 2 \times r \pmod 5\ .$$
3. Pour tout entier n, le produit $n \times (n+1)$ est pair.
4. Il existe un entier pair multiple à la fois de 3, 17 et 23.
5. Il existe un entier impair multiple à la fois de 3, 4 et 5.

Exercice n° 2

Toutes les publications en série, comme les journaux et les périodiques, sont identifiés par un numéro ISSN (International Standard Serial Number). En France, ce numéro est attribué par le Centre national d'enregistrement des publications en série.

L'ISSN comporte huit caractères répartis en deux groupes de quatre, ces groupes étant séparés par un tiret.

Par exemple, ISSN $0999 - 2138$ est associé au titre « Ouest-France Rennes ».

Les sept premiers caractères sont des chiffres qui caractérisent la publication. Le dernier caractère, situé en 8^{e} position, sert de clé de contrôle et est pris dans la liste 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X (qui représente le nombre 10).

Pour déterminer la clé d'un numéro ISSN dont les sept premiers chiffres sont $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$, on calcule le nombre $N = 8a+7b+6c+5d+4e+3f+2g$, puis on détermine le reste r de la division euclidienne de N par 11.

La clé de contrôle est alors déterminée à partir de r à l'aide du tableau de correspondance suivant :

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
clé	0	X	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Refaisons le calcul de la clé de contrôle pour Ouest-France Rennes.

Dans ce cas, $N = 8\times 0+7\times 9+6\times 9+5\times 9+4\times 2+3\times 1+2\times 3 = 179$. Or $179 = 11\times 16+3$. D'où : $r = 3$. La clé vaut donc 8 et le dernier caractère est bien le chiffre 8.

1. Combien peut-on référencer de journaux ou périodiques avec ce système ?
2. (a) Compléter par sa clé de contrôle, représentée par $\square$, le numéro ISSN $1032 - 105\square$.
   (b) Vérifier que le numéro ISSN $0385 - 210\square$ a la même clé que le précédent.

3. Le troisième chiffre du numéro ISSN d'un journal est illisible. On le note c. Le numéro se présente sous la forme ISSN $24c6 - 3014$.
   (a) Montrer que : $88 + 6c \equiv 7 \pmod{11}$.
   (b) Quel est le chiffre manquant c ?
4. Une erreur fréquente lorsqu'on saisit les sept premiers chiffres d'un numéro ISSN est de permuter deux chiffres qui se suivent.
   Si on tape $a\,c\,b\,d - e\,f\,g$ au lieu de $a\,b\,c\,d - e\,f\,g$, l'erreur est-elle détectée par la clé de contrôle ?

Exercice n° 3

Soit N un entier naturel non nul.

On considère l'algorithme suivant :

1. `Initialiser en donnant à` A `et à` I `la valeur de` N.
2. `Tant que` $I > 2$`, réitérer la procédure suivante`
   - `Donner à` I `la valeur` $I - 1$
   - `Donner à` A `la valeur` $A \times I$
3. `Donner à` A `la valeur` $A - 1$.
4. `Afficher` A.

1. Pour tout entier naturel N on note A_N le nombre affiché à l'étape 4 de cet algorithme.
   (a) Calculer A_1, A_2, A_3 et A_4.
   (b) Vérifier que $A_5 = 119$.
   (c) Calculer A_{10}.
2. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse donnée :
   (a) « A_N est un nombre premier pour certaines valeurs de N. »
   (b) « A_N est un nombre premier pour n'importe quelle valeur de N. »
   (c) « Quel que soit l'entier naturel non nul N, si N est premier, alors A_N est premier. »
   (d) « Il existe A_N premier tel que N n'est pas premier. »
3. Étudier la parité des nombres A_N.

Exercice n° 4 *

Le code ISBN (International Standard Book Number, Numéro international normalisé du livre) permet d'identifier chaque livre de manière unique dans le monde entier. Il sert notamment de numéro de référence dans des bases de données informatiques (bibliothèques, éditeurs). Il comprend dix chiffres répartis en quatre groupes séparés par des tirets.

Exemples :

ISBN $2 - 266 - 02612 - 7$
ISBN $2 - 86623 - 490 - 1$

Le premier groupe correspond au pays de l'éditeur (2 pour la France), le deuxième groupe est le numéro de l'éditeur, le troisième celui du livre, enfin le dernier chiffre est une clé qui sert à vérifier qu'on n'a pas effectué d'erreur de saisie en rentrant le code dans un ordinateur. Cette clé est calculée de la manière suivante :

À partir des neuf premiers chiffres a_1, a_2, a_3,... a_9 (sans tenir compte des tirets), on calcule la somme : $S = a_1 + 2 \times a_2 + 3 \times a_3 + 4 \times a_4 + 5 \times a_5 + 6 \times a_6 + 7 \times a_7 + 8 \times a_8 + 9 \times a_9$, puis on calcule le reste de la division euclidienne de S par 11. Ce reste est la clé.

Il s'agit d'un entier compris entre 0 et 10 inclus ; s'il vaut 10 on l'écrit alors avec le chiffre romain X.

Exemple : un livre américain est codé par les chiffres $0 - 19 - 857505 - \bullet$. La somme S vaut dans ce cas 208 ; or $208 = 11 \times 18 + 10$. Le reste est égal à 10, donc la clé sera X. On obtient alors le code : ISBN $0 - 19 - 857505 - \mathrm{X}$.

1. Compléter les codes suivants par leur clé :
   ISBN $0 - 7136 - 6020 - \bullet$
   ISBN $2 - 7427 - 0008 - \bullet$
   ISBN $0 - 691 - 05729 - \bullet$
2. Un bibliothécaire saisit le code ISBN $2 - 70 - 031999 - 7$. Le logiciel lui indique alors qu'il a commis une erreur.
   (a) Comment le logiciel a-t-il détecté l'erreur ?
   (b) Le bibliothécaire s'aperçoit alors qu'il a interverti les deux chiffres du numéro de l'éditeur ; il saisit donc le code ISBN $2 - 07 - 031999 - 7$. Ce code est-il cohérent avec la clé de contrôle ?
3. Le bibliothécaire reçoit un nouveau message d'erreur en rentrant le code ISBN $2 - 85368 - 313 - 2$. Corriger son erreur, sachant qu'elle porte seulement sur le chiffre de gauche.
4. Décrire en langage naturel l'algorithme (le programme) qui permet de détecter les éventuelles erreurs de saisie grâce à la clé de contrôle.
5. Les propositions suivantes sont-elles justes ou bien fausses ? (justifier rapidement) :
   (a) « Si la somme S est un multiple de 11, alors la clé est 0. »
   (b) « Si la somme S est un multiple de 10, alors la clé est X. »
   (c) « Toutes les erreurs de saisie sont détectables. »
   (d) « Si deux codes possèdent la même clé, alors les sommes S correspondantes sont congrues modulo 11. »

6. Écrire la réciproque de la dernière proposition puis préciser si cette dernière est juste ou fausse.
7. On voudrait savoir si intervertir deux chiffres entraîne toujours une modification de la clé, ce qui permet de déceler l'erreur.

   On suppose par exemple qu'au lieu de saisir les neuf chiffres d'un code ISBN $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$, le bibliothécaire saisisse $a_1a_3a_2a_4a_5a_6a_7a_8a_9$. On considère les sommes S et S' correspondant respectivement au code exact et au code erroné.

   (a) Calculer $S - S'$ en fonction des chiffres a_2 et a_3.

   (b) Quelles sont les valeurs possibles pour $S - S'$?

   (c) Est-ce que S et S' peuvent être congrues modulo 11 ?

   (d) Que peut-on en conclure ?

Exercice n° 5

On dit qu'un nombre est un palindrome dans un système de numération s'il peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche en gardant la même valeur. Par exemple, 34543 est un palindrome dans le système de numération décimale.

1. Le nombre 3773 est un palindrome. Quelle est son écriture en base cinq ? Est-ce un palindrome en base cinq ?
2. (a) Le nombre $(\overline{2002})_{cinq}$ est un palindrome en base cinq. Est-ce un palindrome dans le système de numération décimale ?

   (b) Tous les nombres de quatre chiffres qui sont des palindromes en base cinq sont-ils des palindromes dans le système de numération décimale ?
3. On considère un nombre de quatre chiffres qui est un palindrome dans le système de numération décimale. Il s'écrit $\overline{abba}$. Étudier la divisibilité par 11 de ce nombre.

Exercice n° 6

1. On considère l'algorithme n°1 suivant :

Entrée	:	n `un entier naturel`
Initialisation	:	`donner à` u `la valeur initiale` n
Traitement	:	
		| `Tant que` $u \geqslant 11$ `affecter à` u `la valeur` $u - 11$
Sortie	:	`afficher` u

   (a) Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 35$ puis pour $n = 55$.

   (b) Soit un entier naturel n quelconque. En imaginant que l'on fasse fonctionner cet algorithme avec n, quel lien existe-t-il entre n et le nombre entier naturel u obtenu en sortie ?

2. On considère l'algorithme n°2 suivant :

Entrée	:	a `un élément de {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}`
		b `un élément de {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}`
Traitement	:	
		`affecter à` u `la valeur` $a+10b$
		`affecter à` v `la valeur` $b+10a$
		`affecter à` m `la valeur` $v+100u$
Sortie	:	`afficher` m

   (a) Faire fonctionner cet algorithme pour $a = 1$ et $b = 2$, $a = 2$ et $b = 1$.

   (b) Écrire en base 10 le nombre m donné en sortie par cet algorithme pour deux nombres a et b quelconques mis en entrée dans cet ordre.

3. À partir de deux nombres a et b quelconques, éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, l'algorithme n°2 donne en sortie un nombre m. On donne ce nombre m comme entrée à l'algorithme n°1. En écrivant m en fonction de a et de b, expliquer pourquoi on obtient toujours 0 comme résultat.

Exercice n° 7

On considère l'algorithme suivant :

Entrée	:	X `entier naturel,` Y `entier naturel non nul tel que` $X < Y$`,`
		n `entier naturel`
Initialisation	:	L `liste vide ;`
		`Donner à` x `et à` r `la valeur de` X`, donner à` y `la valeur de` Y `;`
Traitement	:	`Pour` i`=1 jusqu'à` n
		`Donner à` x `la valeur de` $10 \times r$
		`Calculer le quotient entier de` x `par` y `et l'affecter à` q
		`Calculer le reste de la division euclidienne de` x `par` y `et l'affecter à` r
		`Ajouter le contenu de` q `à la liste` L
Sortie	:	`Afficher` L

1. (a) Qu'obtient-on dans la liste L lorsque l'on fait fonctionner cet algorithme avec en entrées $X = 2$, $Y = 11$ et $n = 6$?

   (b) Interpréter le contenu de la liste L relativement au quotient $\dfrac{X}{Y}$.

2. On s'intéresse dans cette question au cas où $X = 5$ et $Y = 14$.

   On souhaite programmer cet algorithme avec un tableur afin d'obtenir des résultats analogues aux suivants :

	A	B	C	D	E
1					
2	**n**	**x**	**y**	**q**	**r**
3		5	14		5
4	1	50	14	3	8
5	2	80	14	5	10
6	3	100	14	7	2
7	4	20	14	1	6
8	5	60	14	4	4
9	6	40	14	2	12
10	7	120	14	8	8
11	8	80	14	5	10
12	9	100	14	7	2
13	10	20	14	1	6
14	11	60	14	4	4
15	12	40	14	2	12

La valeur de X a été saisie en cellule `B3` et celle de Y en cellule `C3`.

(a) Dans quelle plage de cellules retrouve-t-on le contenu de la liste L ?

(b) Quelles formules saisir en cellule `D3` et `E3` si l'on souhaite pouvoir les recopier respectivement dans les plages de cellules « `D4:D15` » et « `E4:E15` » ?

(c) Quelle formule saisir en cellule `B4` ?

(d) Si l'on recopie dans la plage de cellules « `A16:E16` » les formules saisies dans la plage de cellules « `A15:E15` », quels contenus va-t-on obtenir ?

(e) À quelle valeur de n suffit-il de s'arrêter pour être en mesure de prévoir la suite de tous les contenus des colonnes `B`, `D` et `E` ? Pourquoi ?

3. On a programmé sur tableur l'algorithme donné en début d'exercice et obtenu le résultat suivant. Malheureusement lors de la capture d'écran les contenus de certaines cellules ont été effacés. Il manque en particulier des valeurs de X et Y.

	A	B	C	D	E
1					
2	**n**	**x**	**y**	**q**	**r**
3					23
4	1	230		2	32
5	2	320		3	23
6	3	230		2	32
7	4	320		3	23

(a) Quelle écriture décimale illimitée du quotient $\dfrac{X}{Y}$ peut-on donner grâce aux informations données par cette capture ?

(b) Retrouver X et Y.

Remarque Les fonctions utilisées peuvent être :
- la fonction partie entière notée `ENT` qui, à tout nombre réel x associe l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$;
- la fonction `MOD` : `MOD`(*nombre*, *diviseur*) qui donne le reste de la division euclidienne du *nombre* par le *diviseur*.

Exercice n° 8

1. Décomposer 105840 en un produit de facteurs premiers.
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul k dont le produit par 105840 est le cube d'un entier naturel n ? Préciser la valeur de n.

Exercice n° 9

L'âge du capitaine

Le capitaine a fait naufrage. Tout ce que l'on a retrouvé sur lui est sa carte de sécurité sociale. On parvient à déchiffrer son numéro INSEE, sauf le deuxième chiffre a et le troisième chiffre b qui sont illisibles :

$$1\,a\,b\,12\,71\,153\,044 \quad \text{Clé } 67$$

Les deux chiffres a et b qui manquent sont, dans cet ordre, les deux derniers chiffres de l'année de naissance du capitaine. On se propose d'utiliser la clé du numéro INSEE pour retrouver cette année de naissance.

1. (a) La clé K d'un numéro INSEE est calculée de la manière suivante : $K = 97 - R$ où R est le reste de la division euclidienne par 97 de l'entier N constitué par les 13 premiers chiffres du numéro INSEE.
   Démontrer que la clé K d'un numéro INSEE est telle que $N + K$ est divisible par 97.
   (b) Déduire de la question (a) que, pour le numéro INSEE du capitaine, on a : $N \equiv 30 \pmod{97}$.
2. On écrit $\overline{1ab1271153044} = \overline{1ab} \times 10^{10} + A$, où $A = 1271153044$.
   (a) Calculer le reste de la division euclidienne de A par 97.
   (b) Justifier la congruence suivante : $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$.
   (c) En déduire que l'on a : $10^{10} \equiv 49 \pmod{97}$.
3. (a) Déduire des résultats établis aux questions 1. et 2. que l'on a : $\overline{1ab} \times 49 \equiv 73 \pmod{97}$.
   (b) Vérifier que l'on a : $49 \times 2 \equiv 1 \pmod{97}$.
   (c) Déterminer l'année de naissance du capitaine.

Exercice n° 10

1. On désigne par n un nombre entier naturel quelconque. On suppose que n est congru à 5 modulo 7.
   (a) Déterminer un nombre entier naturel p tel que $n^3 \equiv p \pmod 7$.
   (b) En déduire que le nombre entier $n^3 + 1$ est divisible par 7.
2. Soit m un nombre entier naturel quelconque. Prouver que si m est congru à 4 modulo 7 alors le nombre entier $m^3 - 1$ est divisible par 7.
3. On considère le nombre entier $A = 1999^3 + 2007^3$.
   (a) Justifier que $1999 \equiv 4 \pmod 7$.
   (b) Déterminer le plus petit nombre entier naturel p tel que $2007 \equiv p \pmod 7$.
   (c) En déduire, sans calculer A, que le nombre entier naturel A est divisible par 7.

Exercice n° 11

1. Justifier que $123 \equiv 0 \pmod 3$.
2. Parmi les assertions suivantes indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses (les réponses doivent être justifiées) :
   (a) 123^{2005} est divisible par 3.
   (b) $124^{2006} - 1$ est divisible par 3.
   (c) $125^{2007} - 1$ est divisible par 3.

Exercice n° 12

1. On pose $A = \dfrac{52}{143}\cdot$
   (a) Écrire A sous forme d'une fraction irréductible.
   (b) A est-il un nombre décimal ?
2. On pose $B = 38,63636363\ldots$
   (a) Écrire B sous la forme d'une fraction irréductible.
   (b) B est-il un nombre décimal ?
3. Montrer que $A + B$ est un nombre entier.

Exercice n° 13

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $\dfrac{3}{11}\cdot$

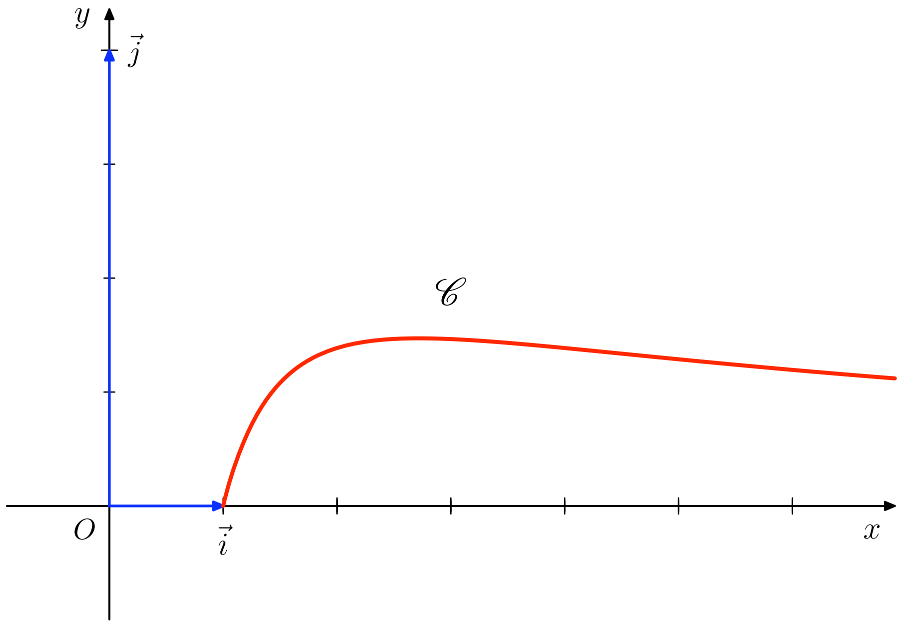
1. Calculer, sous forme de fractions irréductibles, u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Donner l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale illimité de u_{36}.
4. On pose $S = 0,545454\ldots$ On considère la suite de nombres (a_n) définie de la manière suivante :
   $a_1 = 0,54$ et, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $a_{n+1} = 10^{-2}\,a_n$.
   (a) Déterminer la nature de la suite (a_n).
   (b) Calculer $a_1 + a_2 + a_3$.
   (c) On pose $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, pour tout entier naturel non nul n. Montrer que $S_n = \dfrac{54}{99}\big(1 - (10^{-2})^n\big)$.
   (d) En déduire la limite de la somme S_n lorsque n tend vers l'infini. Déterminer deux entiers p et q tels que $S = \dfrac{p}{q}\cdot$
5. S est-il un terme de la suite (u_n) ? Si oui, quel est son rang dans la suite ?

Exercice n° 14

Dans cet exercice, sont envisagées deux manières différentes de démontrer la propriété ($\mathscr{P}$) :
« Pour tout entier $n \geqslant 4$ on a $2^n \geqslant n^2$ ».

Première méthode

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\cdot$
   La courbe (C) ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



2. (a) Après avoir calculé $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de f, préciser les variations de f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $\dfrac{\ln n}{n} \leqslant \dfrac{\ln 4}{4}\cdot$
   (c) Comparer $\dfrac{\ln 4}{4}$ et $\dfrac{\ln 2}{2}\cdot$
   (d) En déduire que la propriété ($\mathscr{P}$) est vraie.

Deuxième méthode

1. Vérifier que, pour tout entier n, on a $2n^2 - (n+1)^2 = (n-1)^2 - 2$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
3. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que la propriété ($\mathscr{P}$) est vraie.

Exercice n° 15

Dans un campus universitaire, à l'issue d'une compétition d'athlétisme, 1250 athlètes subissent un test antidopage. Le test n'est pas sûr à 100 %, certains athlètes peuvent être dopés et avoir cependant un test négatif et, de même, des athlètes non dopés peuvent avoir un test positif. Le tableau ci-dessous donne la répartition des 1250 athlètes en fonction du résultat du test et de l'état réel de l'athlète :

	Test négatif	Test positif
Athlète non dopé	1188	12
Athlète dopé	1	49

Si A et B sont deux événements, on notera $\overline{A}$ l'événement contraire de A, $P(A)$ la probabilité de l'événement A, $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

1. On choisit au hasard un athlète.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

S : « L'athlète est non dopé »

T : « Le test est positif »

$S \cap T$: « L'athlète est non dopé et le test est positif ».

2. On choisit au hasard un athlète non dopé. Quelle est la probabilité qu'il ait un test positif ?
3. Les événements « Le test est positif » et « L'athlète est dopé » sont-ils indépendants ?
4. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que l'athlète soit non dopé ?

Exercice n° 16

Dans une population donnée, la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie est notée x, où $0 \leqslant x \leqslant 1$. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier la fiabilité de ce test.

La probabilité qu'une personne atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,98 et la probabilité qu'une personne non atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,01.

On choisit au hasard une personne de la population et on la soumet au test. On note M l'événement : « La personne est atteinte de cette maladie » et T l'événement : « Le test est positif ».

1. Exprimer les probabilités $p(M \cap T)$ et $p(\overline{M} \cap T)$ en fonction de x.
   En déduire la probabilité $p(T)$ en fonction de x.
2. Montrer que la probabilité conditionnelle de M sachant T est $\dfrac{98x}{97x+1}$.
3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit atteinte de cette maladie est supérieure à 0,95.
   (a) Le test est-il fiable si la proportion x des personnes atteintes de cette maladie est 0,05 ?
   (b) À partir de quelle proportion x le test est-il fiable ? Interpréter ce résultat.

Exercice n° 17

On déplace un pion sur une suite de cases numérotées de 1 à 18 de la façon suivante : on jette un dé équilibré et on avance le pion du nombre indiqué sur le dé. Par exemple, au début du jeu, on jette le dé et on tire le deux, on pose le pion sur la case 2 ; puis on rejette le dé et on tire le quatre, on pose le pion sur la case 6 : le pion est donc passé par les cases 2 et 6.

Le joueur lance trois fois le dé et son gain est égal au numéro de la dernière case atteinte, sauf s'il passe par la case 3 : alors, il est éliminé.

1. Quelle est la probabilité pour que le joueur passe par la case 1 ?
2. (a) Écrire les deux trajets permettant de passer par la case 2.
   (b) Montrer que la probabilité que le joueur passe par la case 2 est $\frac{7}{36}$.
3. (a) Écrire les quatre trajets permettant de passer par la case 3.
   (b) Calculer la probabilité que le joueur soit éliminé.
   (c) On a réalisé 10 000 fois la simulation de ce jeu. Dans 1682 cas le joueur passe par la case 1 et dans 2259 cas, il passe par la case 3. Ces résultats sont-ils vraisemblables ?

Exercice n° 18

On jette un dé équilibré et on s'arrête lorsqu'on a tiré un six.

1. Calculer la probabilité d'obtenir 6 au premier coup.
2. Montrer que la probabilité de n'obtenir un 6 qu'au deuxième coup est $\frac{5}{36}$.
3. Calculer la probabilité de n'obtenir un 6 qu'au troisième coup (on donnera le résultat sous forme de fraction irréductible et une valeur approchée à 10^{-4} près).
4. L'affirmation « lorsqu'on jette un dé équilibré, on est certain d'obtenir un 6 dans les six premiers coups » est-elle exacte ?

Exercice n° 19

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules vertes.

Une urne B contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Les étapes du jeu se décomposent de la façon suivante :
– le joueur lance le dé ;
– si le dé indique un « 6 », le joueur choisit au hasard une boule dans l'urne A ;
– sinon, il choisit au hasard une boule dans l'urne B.

1. Dessiner un arbre de probabilités analysant le jeu décrit ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir lancé un « 6 » si la boule obtenue est verte ?

Exercice n° 20

Dans un lycée donné, cinq options sportives sont proposées aux élèves :

Natation – Gymnastique – Athlétisme – Basket-ball – Volley-ball.

Au début de l'année scolaire, un élève doit choisir deux de ces options.

1. (a) Donner tous les choix possibles.

   (b) Combien de choix cet élève a-t-il s'il ne peut s'inscrire à plus d'un sport collectif (basket-ball ou volley-ball) ?

2. En 2005-2006, 36 % des élèves de ce lycée ont choisi la natation, 48 % des élèves ont choisi le volley-ball et un tiers des élèves ayant choisi la natation ont également choisi le volley-ball. D'autre part, 46 % des élèves de ce lycée sont des filles.

   On choisit au hasard un élève E de ce lycée et on définit les événements suivants :
   – F : l'élève E est une fille ;
   – N : l'élève E a choisi la natation ;
   – V : l'élève E a choisi le volley-ball.

   (a) Préciser les probabilités suivantes : $P(F)$, $P(N)$, $P(V)$ et $P_N(V)$.

   (b) Définir par une phrase les événements $N \cap V$ et $N \cup V$.

   (c) Calculer $P(N \cap V)$ et $P(N \cup V)$.

   (d) Sachant que l'élève E a choisi le volley-ball, quelle est la probabilité qu'il ait également choisi la natation.

3. On admet que les événements F et N sont indépendants. Sachant que l'élève E est une fille, qu'elle est la probabilité qu'elle ait choisi la natation ?

Exercice n° 21

Dans une classe de 32 élèves, 12 élèves lisent de la poésie romantique, 15 lisent de la poésie contemporaine et 8 lisent les deux types de poésie. Le professeur de lettres choisit au hasard un élève :

Pour chacune des quatre propositions suivantes, numérotées de A à D, indiquer si elle est vraie (V) ou fausse (F).

On ne demande pas de justification.

1. La probabilité que cet élève lise de la poésie romantique est $\frac{3}{8}$.
2. La probabilité que cet élève lise de la poésie romantique ou contemporaine (ou les deux) est $\frac{19}{32}$.
3. La probabilité que cet élève ne lise ni poésie romantique, ni poésie contemporaine est $\frac{5}{32}$.
4. La probabilité que cet élève lise de la poésie romantique sachant qu'il lit de la poésie contemporaine est $\frac{1}{4}$.

Exercice n° 22

Une des épreuves proposées aux candidats pour un emploi dans un cabinet d'architecture avait l'intitulé suivant : « Représenter, en *perspective centrale*, un carrelage 4 carreaux par 4 carreaux ».

Les dessins des quatre candidats, numérotés de 1 à 4, sont reproduits en annexe 1. Les appréciations qui leur ont été attribuées par le jury sont, dans le désordre, les phrases a, b, c et d ci-dessous :

(a) On demandait un dessin en perspective centrale !

(b) Où est le point de fuite principal ?

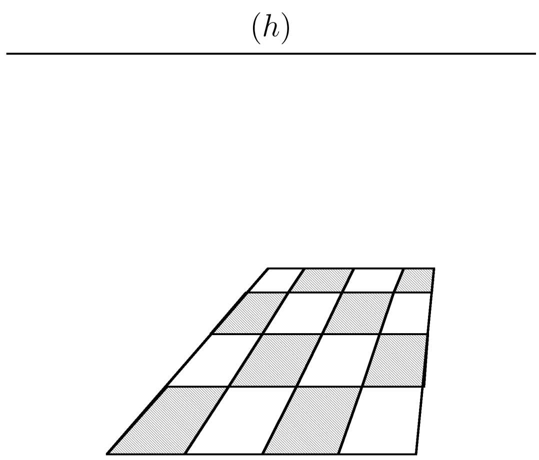
(c) Bien.

(d) Erreur : le centre du carrelage est mal placé.

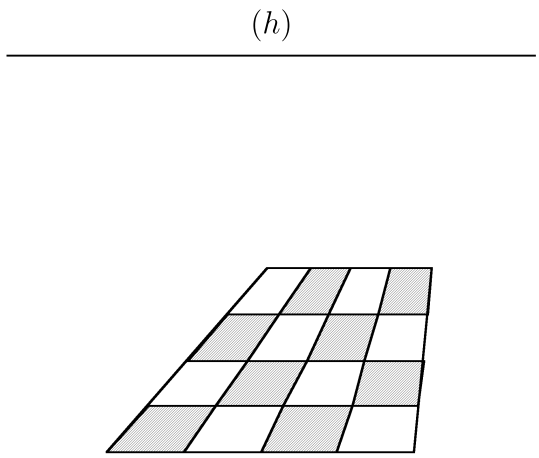
1. En complétant au besoin les dessins des candidats par des traits de construction, associer à chacun d'eux (dessins n° 1, 2, 3 et 4), l'appréciation (a, b, c ou d) qui lui correspond.
2. La figure 5 (Annexe 2) est la représentation en perspective centrale d'un cube dont la face avant est située dans un plan frontal. Compléter la figure par un carrelage régulier 2×2 sur chacune des trois faces visibles. (*On laissera apparents les traits de construction*).

Note : *Sur les 5 figures,* (h) *représente la ligne d'horizon.*

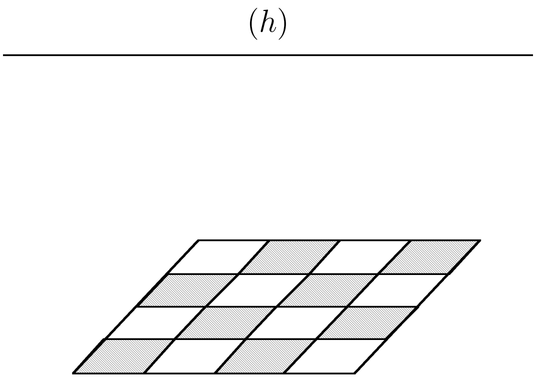
Annexe 1



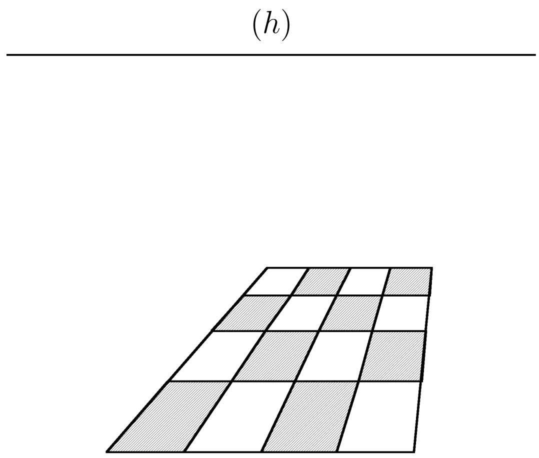
Dessin 1



Dessin 2



Dessin 3



Dessin 4

Annexe 2

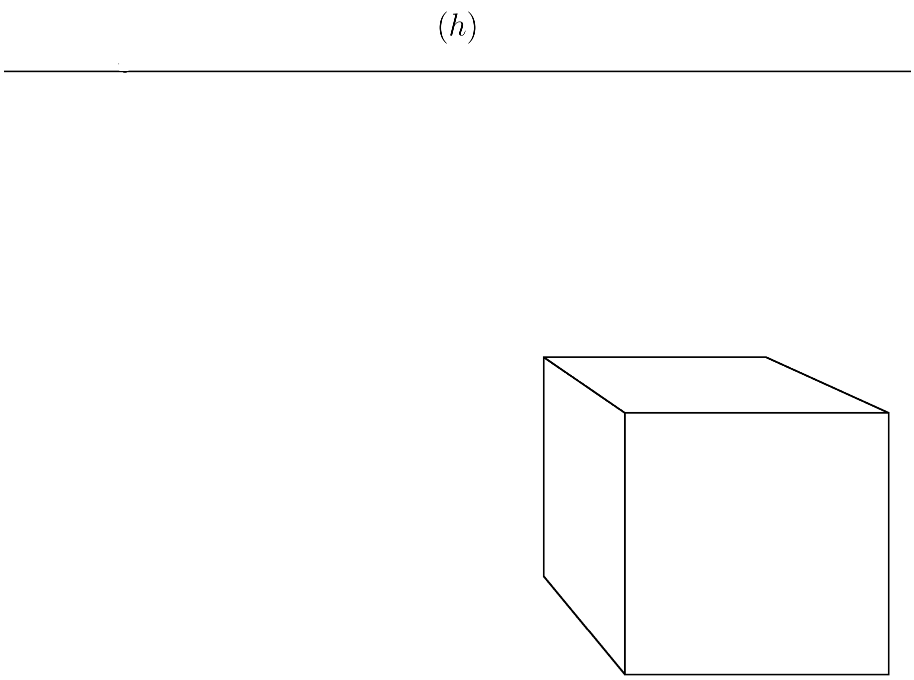
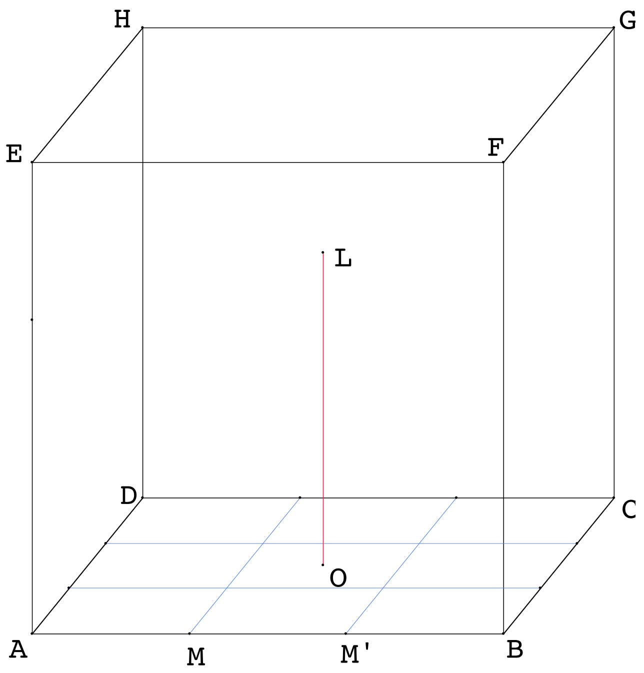


Figure 5

Exercice n° 23



Le dessin ci-dessus représente en perspective parallèle l'intérieur d'une salle dont la largeur, la longueur et la hauteur ont même mesure α. Le sol `ABCD` de cette salle est constitué de neuf dalles carrées de dimension identique. Au centre O de cette salle est placé un lampadaire dont la hauteur mesure les deux tiers de α.

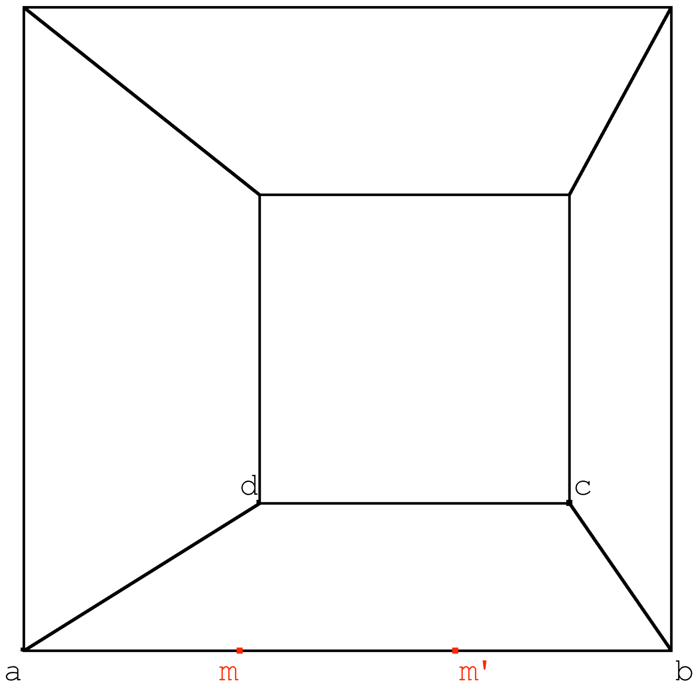
Sur le dessin donné en annexe cette salle est représentée en perspective centrale, le mur `ABFE` étant dans un plan frontal. Les points `a`, `b`, `c`, `d`, `m` et `m`$'$ représentent respectivement `A`, `B`, `C`, `D`, `M` et `M`$'$.

1. (a) Construire la ligne d'horizon.
   (b) Construire les représentations dans cette perspective centrale des droites parallèles à (`BD`) passant respectivement par `M` et `M`$'$.
   (c) Construire la représentation des neuf dalles qui recouvrent le sol de la salle.

2. (a) Construire le point `o` qui représente le point `O`.
   (b) Construire le point `l` qui représente le sommet `L` du lampadaire.

Note : *On laissera apparents les traits de construction.*

Annexe :



Exercice n° 24

La figure $\mathscr{F}_1$ est une représentation de trois carrés accolés ABCD, CDGH et BCIJ. La figure $\mathscr{F}_2$ est une représentation en perspective centrale du carré ABCD.

1. Sur la figure $\mathscr{F}_2$
   (a) Tracer la ligne de fuite du plan (ABCD).
   (b) Placer le point de fuite de la droite (BD) et celui de la droite (AC).
2. Terminer la représentation en perspective centrale des trois carrés accolés.

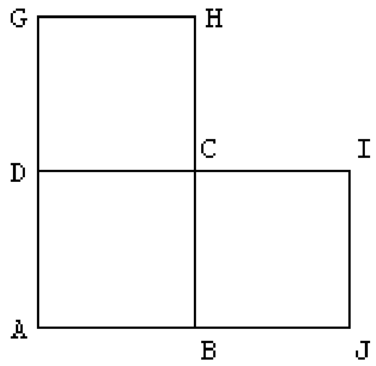


Figure $\mathscr{F}_1$

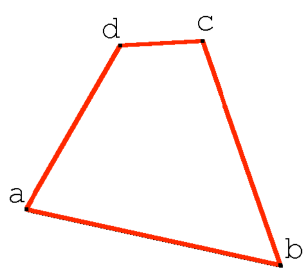


Figure $\mathscr{F}_2$

Exercice n° 25

On considère deux cubes ABCDEFGH et EFGHIJKL, de même taille, posés sur le sol. Le cube EFGHIJKL est placé derrière le cube ABCDEFGH. La face ABCD est dans un plan frontal.

1. Sur la figure 1 terminer la représentation des deux cubes en perspective parallèle.
2. Sur la figure 2 on a représenté en perspective centrale les sommets A B C D et E et la ligne d'horizon (h).
   (a) Placer le point de fuite principal.
   (b) Placer les deux points de distance.
   (c) Terminer la représentation du cube ABCDEFGH.
   (d) Représenter le cube EFGHIJKL et proposer un élément de contrôle.

Note : on laissera apparents les traits de construction.

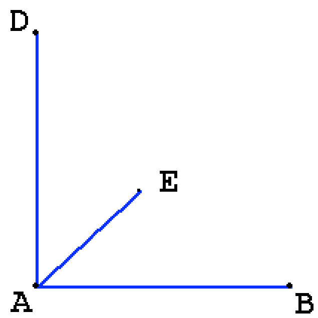


Figure 1

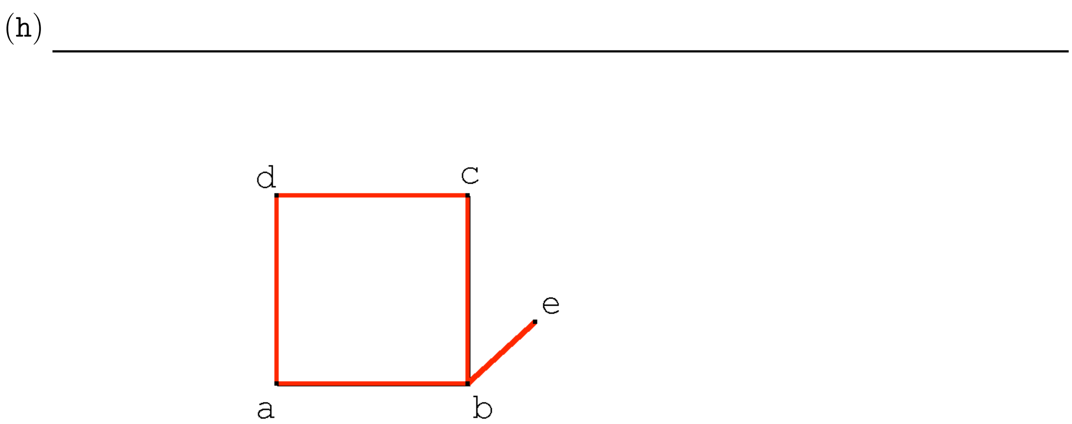


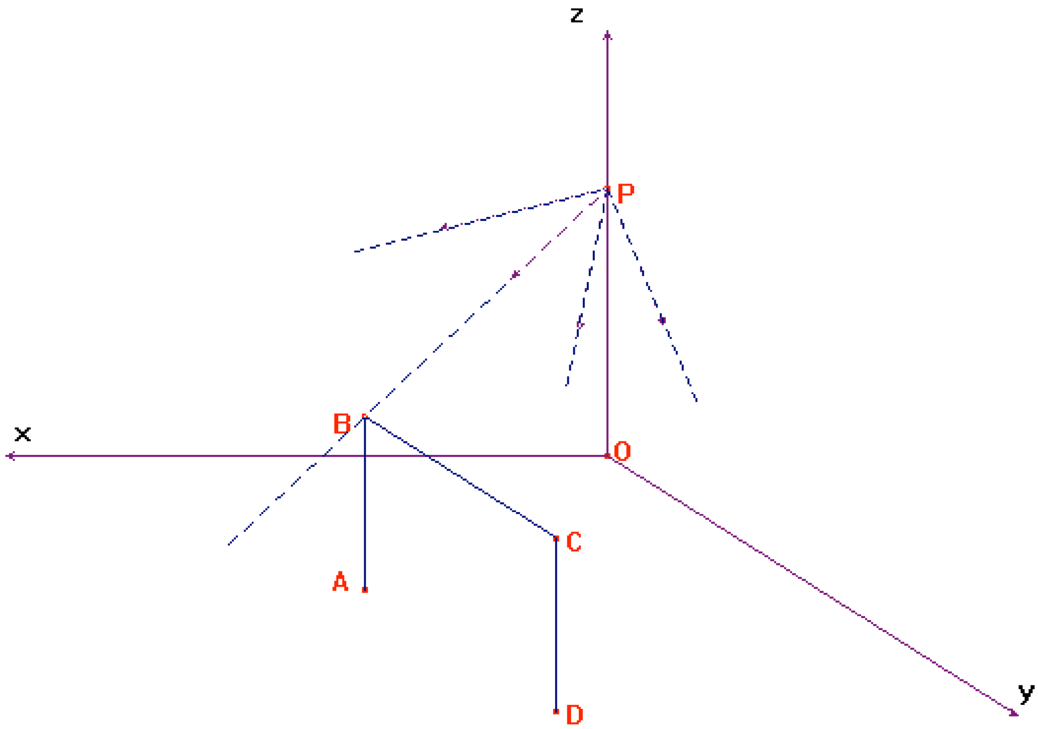
Figure 2

Exercice n° 26 *

Dans un gymnase, on considère une cage de but de hand-ball, éclairée par un projecteur. On s'intéresse à l'ombre projetée sur le sol de cette cage de but.

La situation est schématisée par la figure ci-dessous, qui devra être reproduite et complétée au fur et à mesure.

On laissera apparents les traits de construction.



Le plan (Oxy) représente le sol du gymnase. Les plans (Oxz) et (Oyz) représentent deux murs d'angle de celui-ci ; ils se coupent à la verticale selon l'axe (Oz).

Le projecteur P est sur (Oz).

La cage de but est représentée par les trois segments [AB], [BC], [CD]. Les points A et D sont dans le plan (Oxy). Les droites (AB), (CD) et (Oz) sont parallèles, ainsi que les droites (BC), (AD) et (Oy).

Les ombres projetées sur le sol des points A, B, C, D sont représentées respectivement par les points A', B', C', D'.

1. (a) Que dire des points A' et D' ?
   (b) Construire le point B'.
2. On note la parallèle à la droite (AD) passant par le point B'.
   (a) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
   – La droite Δ est contenue dans le plan (Oxy).
   – Le point d'intersection des droites Δ et (PC) est le point C'.
   Justifier.
   (b) Prouver que les points O, D et C' sont alignés.

3. On considère un ballon, placé dans les mains du gardien, au centre de la cage de but.
   Il est représenté par le point M, centre du rectangle ABCD.
   Son ombre projetée sur le sol est représentée par le point M′.
   Construire M et M′.

Exercice n° 27

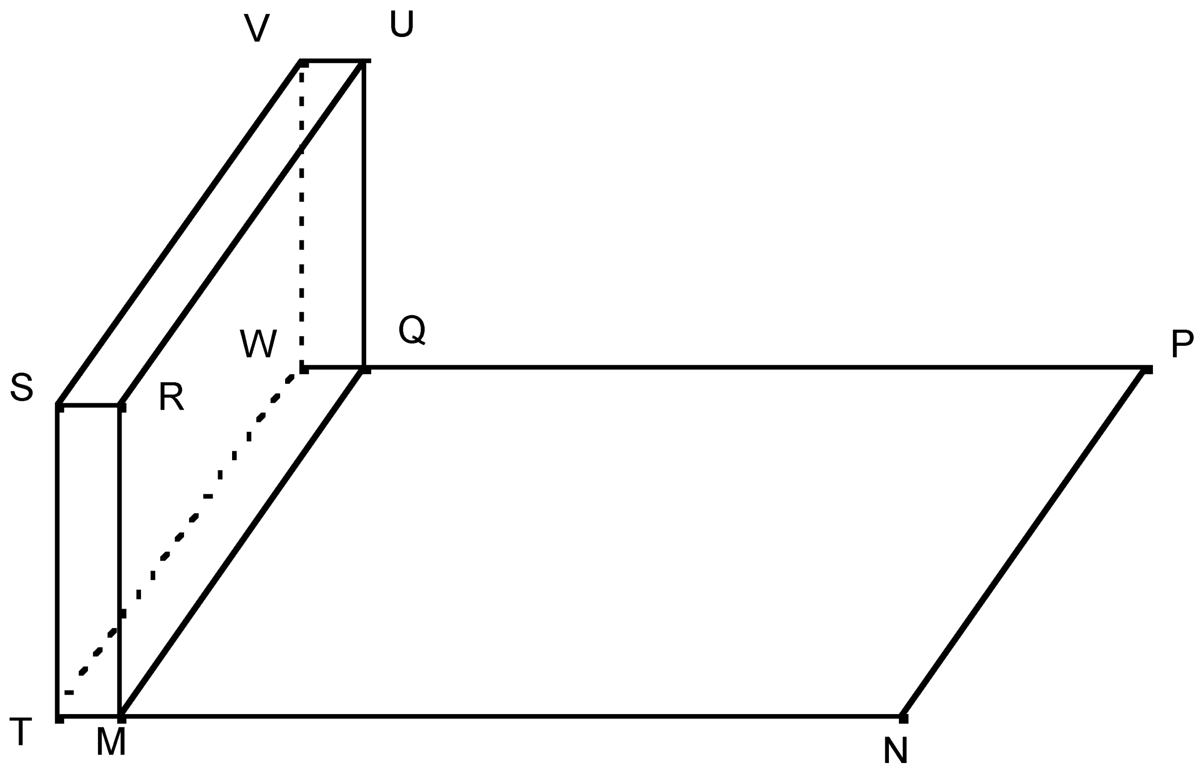


Figure 1

La figure 1 ci-dessus représente le dessin en perspective parallèle d'une terrasse rectangulaire horizontale MNPQ bordée sur sa gauche par un mur TMRSWQUV. Le plan (TMRS) est frontal.

La figure 2 ci-dessous représente le début du dessin en perspective centrale de cette même terrasse. Elle est couverte de dalles, l'une d'entre elles abcd est représentée.

Les images des points R, S, T, ... sont désignées par les lettres minuscules correspondantes sur le dessin en perspective centrale.

Note : Pour tous les dessins demandés, on laissera apparents les traits de construction.

1. Construire le point de fuite principal ω et la ligne d'horizon δ.
2. Construire la représentation du mur.

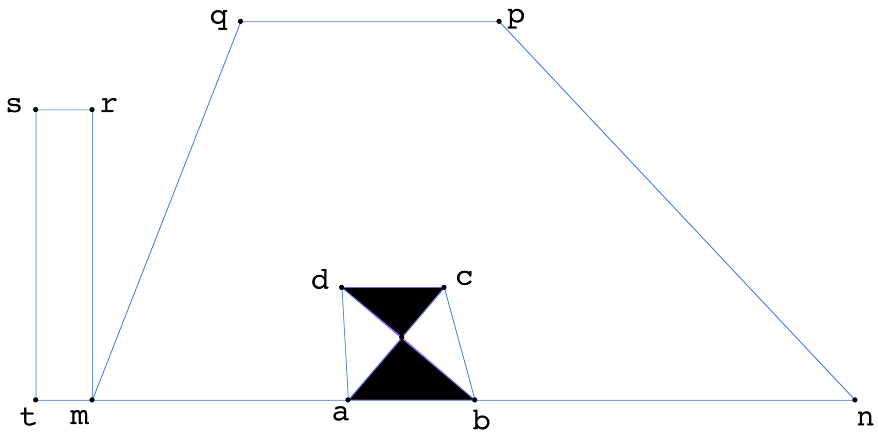


Figure 2

3. Le motif du pavement de la terrasse est représenté ci-contre en vraie grandeur (figure 3) :

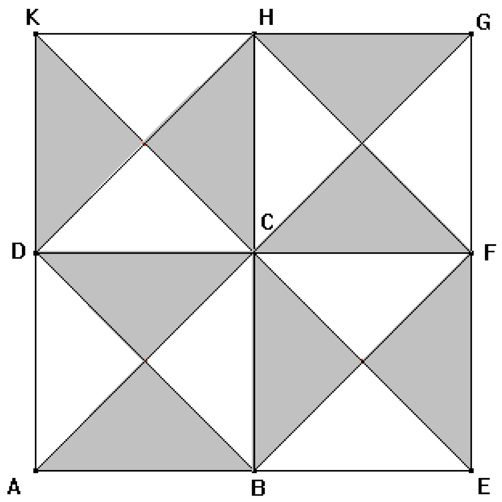


Figure 3

   (a) Construire sur le dessin la représentation en perspective centrale de la dalle `BEFC`.
   (b) Construire la droite (`dh`) sur le dessin en perspective centrale, puis représenter la dalle `DCHK`.

4. (a) Représenter sur le dessin en perspective centrale le centre `O` de la terrasse `MNPQ`.
   (b) En `O` est fixé un piquet vertical de sommet le point `X` et de même hauteur que le mur. Construire le segment [`ox`] qui représente le piquet [`OX`], en précisant les étapes de la construction.

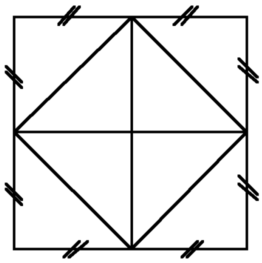
Exercice n° 28

L'objectif de cet exercice est de compléter la représentation en perspective centrale d'une table donnée en annexe.

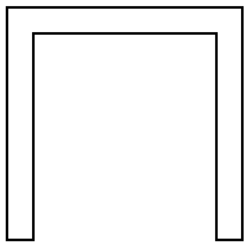
Cette table est constituée d'un plateau carré, de quatre pieds parallélépipédiques de base carrée.

Le plateau est décoré d'un motif.

Les schémas ci-dessous, dont l'un est codé, représentent deux vues de la table.



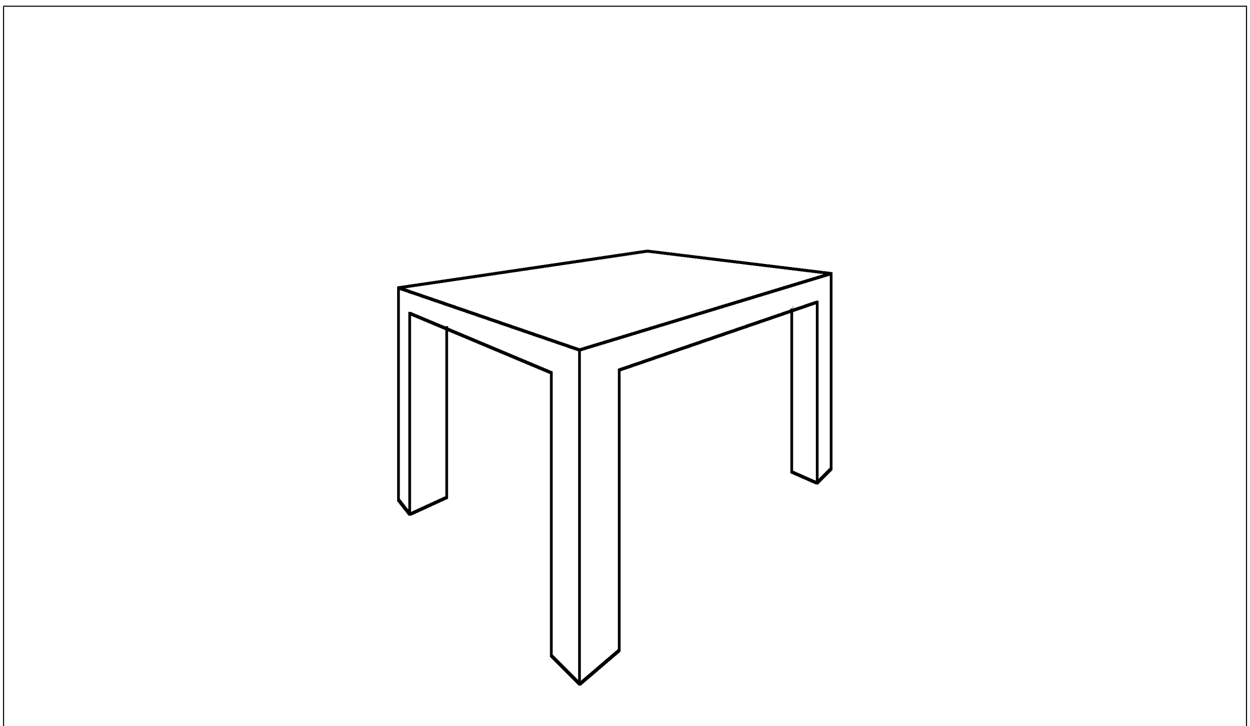
Vue de dessus



Vue de profil

1. Construire sur le dessin donné en annexe, deux points de fuite et la ligne d'horizon.
2. Compléter la représentation en construisant l'image du quatrième pied. On laissera apparents les traits de construction, aucune autre justification n'est attendue.
3. Construire les images des milieux des côtés de la face de dessus. Expliquer la démarche.
4. Représenter le motif du plateau.

ANNEXE : Représentation en perspective centrale



Exercice n° 29

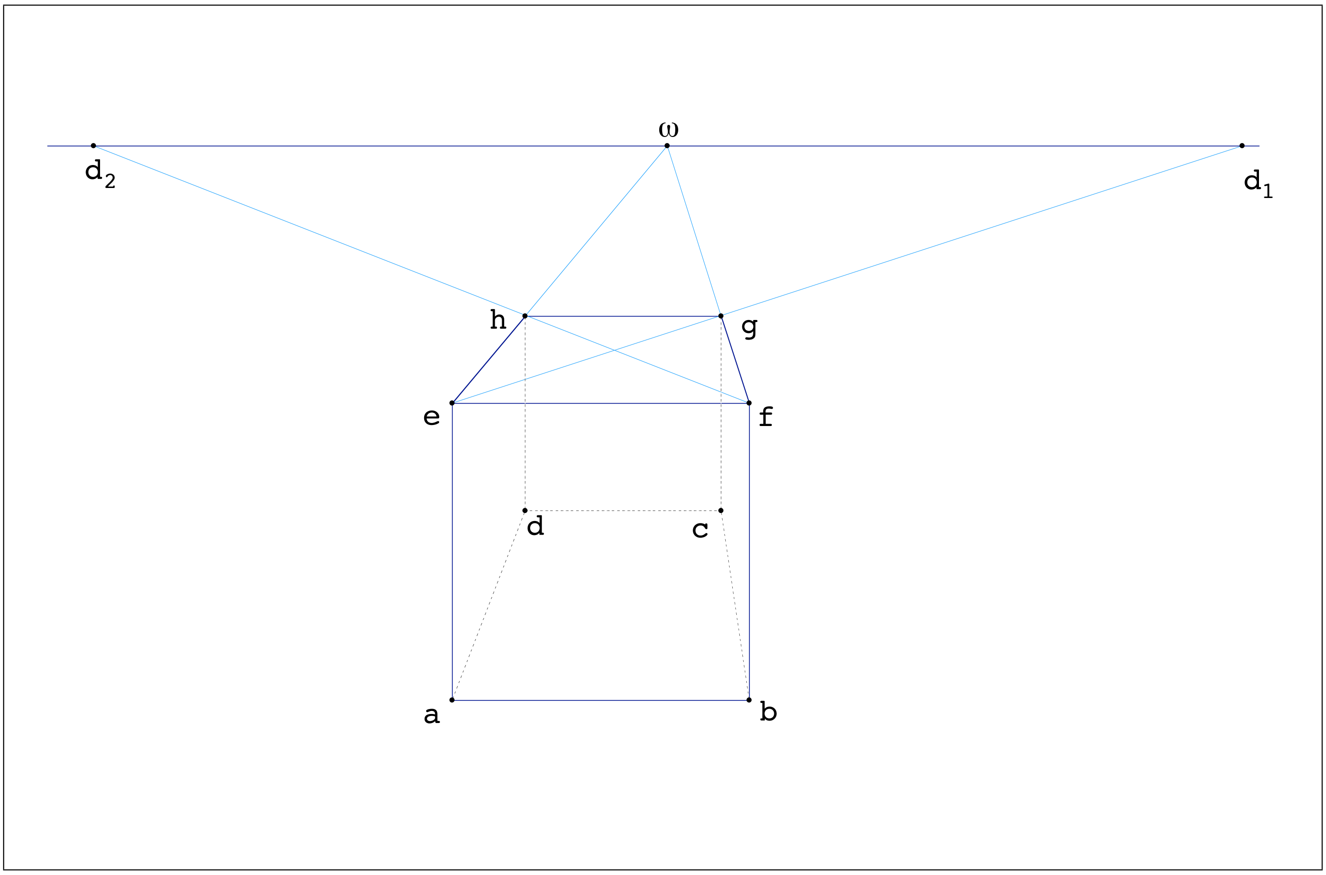
Sur le dessin annexe, on donne une représentation en perspective centrale d'un cube ABCDEFGH. On a placé sur la ligne d'horizon le point de fuite principal ω et les points de distance $\mathtt{d}_1$ et $\mathtt{d}_2$.

Les faces AEFB et DHGC sont parallèles au plan du tableau ; en d'autres termes les plans (AEFB) et (DHGC) sont des plans frontaux. On appelle I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA]. Le but de l'exercice est de représenter sur la feuille annexe le cube placé à l'intérieur du cube ABCDEFGH et dont la face inférieure est IJKL.

Par convention, les points représentant A, B, ... *sur le dessin en perspective centrale sont notés par les lettres minuscules* a, b, ... *correspondantes.*

1. Construire les points i et k qui représentent I et K.
2. Construire les points j et l qui représentent les points J et L.
3. Donner sans justification la nature du quadrilatère IJKL et justifier que $\mathtt{IJ} = \frac{1}{2}\mathtt{BE}$.
4. I′ désigne le sommet du cube IJKLI′J′K′L′ situé « juste au-dessus » de I ; en d'autres termes la droite (II′) est orthogonale au plan (IJKL).
   Expliquer comment construire le point i′ qui représente le point I′.
5. Achever la construction de la représentation du cube IJKLI′J′K′L′.

ANNEXE

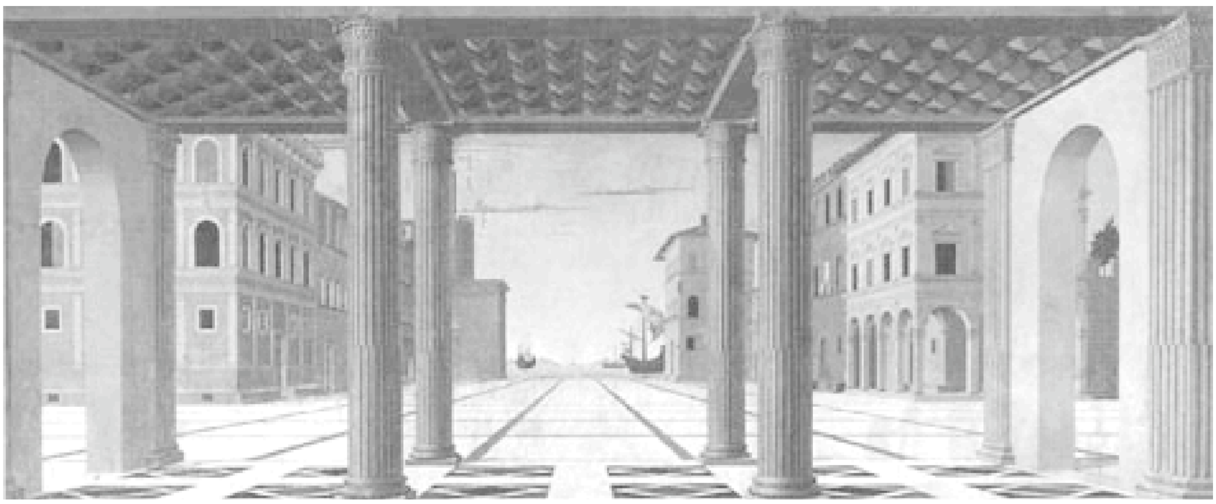


Exercice n° 30 *

1. Compléter la figure ci-dessus, en respectant l'algorithme de construction suivant :

```
Tracer les droites (AC) et (BD)
Tant que la distance CD est supérieure à 1 cm,
    construire le milieu I du segment [CD]
    tracer le point E d'intersection des droites (AC) et (BI)
    tracer le point F d'intersection des droites (BD) et (AI)
    remplacer A par C, C par E, B par D et D par F.
```

2. Un observateur se trouve sur sur une route horizontale bordée de poteaux régulièrement espacés et de même hauteur.
   Les poteaux $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$, ...situés sur le côté gauche de la route viennent d'être représentés en perspective centrale ; les poteaux représentés par [AB] et [GH] sont situés dans un plan frontal.
   Représenter le bord droit de la route et les poteaux faisant face à ceux qui déjà tracés.
3. En supposant que la route mesure 6 mètres de large, estimer : la hauteur des poteaux, la taille de l'observateur et la distance qui le sépare du côté droit de la route.
4. Dans la représentation ci-dessous, en supposant que l'œil du peintre est situé à 1,70 m du sol, estimer la distance entre les deux poteaux situés au premier plan, puis leur hauteur.



Exercice n° 31 *

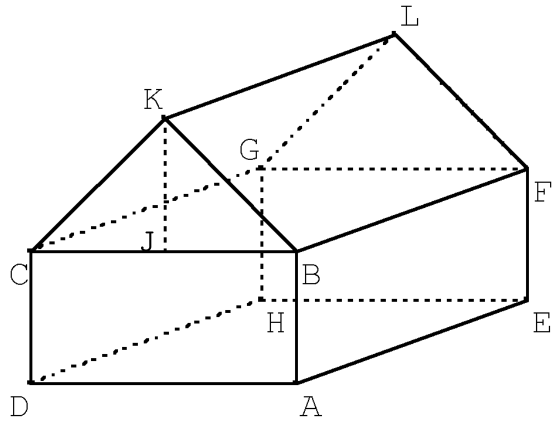


Figure 1

On a représenté ci-dessus une maison en perspective parallèle.

Les murs forment un pavé droit ABCDEFGH dont les faces ADHE et BCGF sont horizontales et constituent respectivement le sol et le plafond de la maison.

L'arête [AB] est verticale.

Le toit est un prisme BKCFLG ; sa base CBK est un triangle isocèle en K dont la hauteur [KJ] est telle que KJ = BA. Il a donc même hauteur que les murs.

Notation : Dans cet exercice, un point de l'espace est noté avec une lettre majuscule et son image dans la perspective centrale, si elle existe, est notée avec une minuscule (ainsi : a est l'image de A, b est l'image de B, ...).

Sur la figure 2 sont déjà représentés, en perspective centrale, les points de fuites respectifs w et w′ des droites (AE) et (AD) ainsi que les images a, b, c, d, e, f des points A, B, C, D, E, F.

En laissant apparents les traits de construction, achever la construction de l'image de la maison.

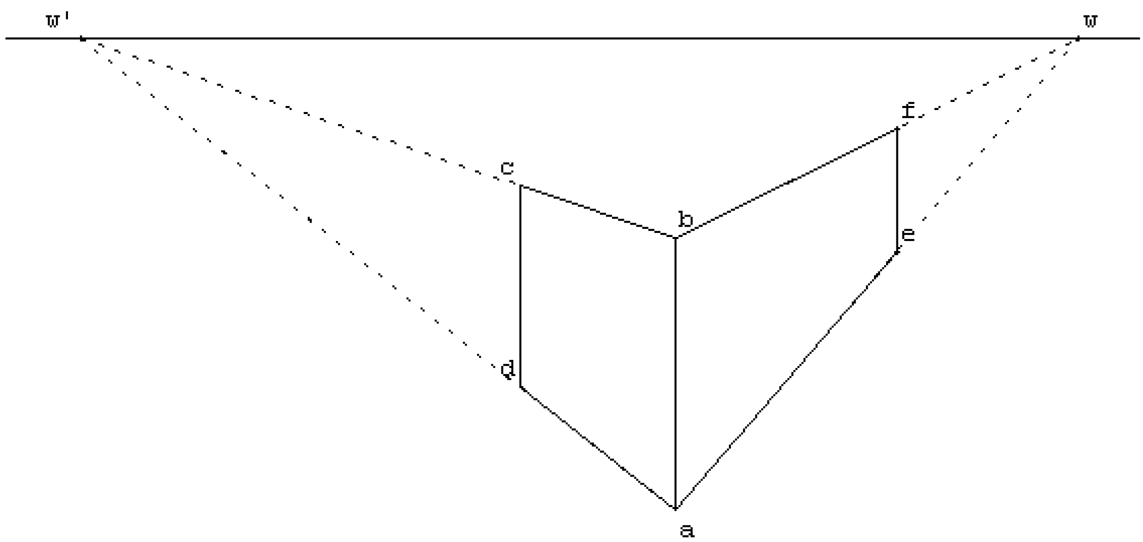


Figure 2

Exercice n° 32

On se donne un cube $ABCDA'B'C'D'$ dont les faces $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont parallèles de telle façon que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') soient parallèles. On désire représenter ce cube en perspective centrale, la droite (AA') se trouvant dans un plan frontal. On appelle cette représentation $abcda'b'c'd'$.

Sur le dessin donné en annexe la ligne d'horizon L ainsi que les quatre points a, b, c et a' sont construits.

Dans les constructions demandées, on laissera apparents les traits de construction ; aucune justification supplémentaire n'est attendue.

1. Achever la construction de la représentation de ce cube.
2. Soit J le milieu de $[AB]$. Construire j, image de J.

ANNEXE