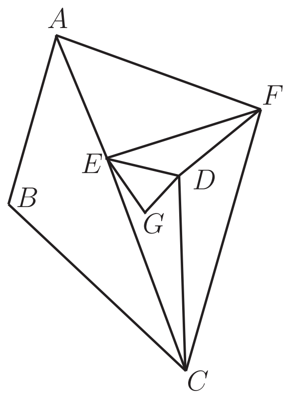
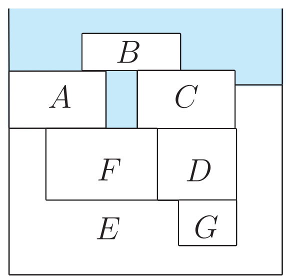
Exercices pour la série ES

Exercice n° 1 (enseignement de spécialité)

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



On donne une carte de géographie, schématisée ci-contre, dans laquelle A, B, C, D, E, F, G représentent des pays et la zone colorée représente un océan.



1- Si l'on décide de modéliser cette carte par le graphe $\mathcal{G}$, quel sens faut-il donner à l'existence d'une arête entre deux sommets ?

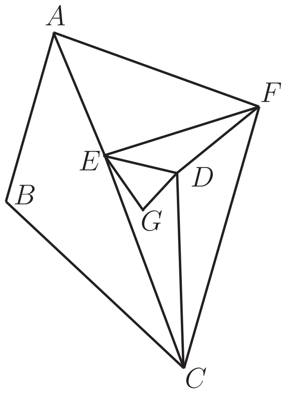
2- a) Existe-t-il un parcours qui permette de franchir chacune des frontières terrestres entre ces pays une fois et une seule ? Si oui, en citer un.

b) Existe-t-il un tel parcours pour lequel le pays de départ et le pays d'arrivée sont les mêmes ?

3- Déterminer le nombre minimal de couleurs permettant de colorier cette carte de sorte que deux pays voisins n'aient jamais la même couleur. Réaliser un tel coloriage.

Exercice n° 2 (enseignement de spécialité)

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



Partie I :

On appelle χ le nombre chromatique du graphe $\mathcal{G}$.

1- Que peut-on dire du sous-graphe $CDEF$?

2- Démontrer que l'on a : $4 \leqslant \chi \leqslant 6$.

3- Déterminer la valeur de χ.

Partie II : On considère un groupe d'élèves de 7 élèves appelés A, B, C, D, E, F et G.
Pour un exposé, les élèves se mettent en équipes mais il faut respecter les incompatibilités entre les élèves.
Dans le tableau ci-contre, chaque croix indique une incompatibilité entre les élèves correspondants.

1- Si l'on décide de modéliser ce tableau d'incompatibilité par le graphe $\mathcal{G}$, quel sens faut-il donner à l'existence d'une arête entre deux sommets ?

2- Combien d'équipes faudra-t-il créer au minimum ? Proposer une répartition des élèves en équipes.

Remarque : une équipe peut comporter un seul élève.

	A	B	C	D	E	F	G
A		×			×	×	
B	×		×				
C		×		×	×	×	
D			×		×	×	×
E	×		×	×		×	×
F	×		×	×	×		
G				×	×		

Exercice n° 2 (enseignement de spécialité)

Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.

1- Dessiner un graphe décrivant cette situation.

2- Écrire la matrice de transition associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.

3- En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classés dans la catégorie A. Calculer l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004.

4- L'état (0,5 ; 0,5) est-il stable ? Justifier cette réponse.

5- Trouver vers quel état converge ce système.

Exercice n° 3 (enseignement obligatoire)

On considère les deux fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{9}{3x+1} \text{ et } g(x) = \frac{9}{(x+1)^2},$$

et on désigne par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal.

1- a) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b) Donner, sur un même dessin, l'allure de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ restreintes à l'intervalle $[0, 10]$. On pourra utiliser une calculatrice.

2- On note, pour tout nombre réel $a > 0$, $F(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $G(a) = \displaystyle\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $F(a) = 3\ln(3a+1)$ et $G(a) = \dfrac{9a}{a+1}$.

b) Donner les valeurs exactes de $F(2)$ et $G(2)$, puis une valeur décimale arrondie au centième.

c) Interpréter graphiquement $F(2)$ et $G(2)$.

3- Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a)$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} G(a)$. Ces résultats étaient-ils prévisibles au vu des questions précédentes ?

Exercice n° 4 (enseignement obligatoire)

On considère les fonctions f, g et h, définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$, respectivement par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \mathrm{e}^x \qquad h(x) = -3x + 2.$$

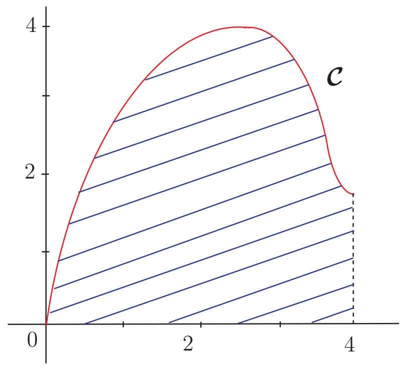
1- Rappeler les sens de variation des fonctions f, g et h.

2- Écrire l'expression, en fonction de la variable x, des fonctions $h \circ f$ et $g \circ h$, définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis, en utilisant la composition des fonctions, étudier le sens de variation de ces deux fonctions.

Exercice n° 5 (enseignement obligatoire)

La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f, définie dans l'intervalle $[0, 4]$, dans le plan muni d'un repère orthonormal.

La mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan hachurée sous cette courbe est égale à $\frac{34}{3}$.



1- Exprimer cette mesure à l'aide d'une intégrale.

2- Déterminer, après avoir rappelé la formule utilisée, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0, 4]$.

Exercice n° 6 (enseignement obligatoire)

Soit A et B deux événements liés à une expérience aléatoire.
Les probabilités des événements A, B et $A \cap B$ sont données par les égalités :

$$P(A) = \frac{5}{3} \qquad P(B) = \frac{3}{4} \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

1- L'une des données ci-dessus est aberrante, laquelle ? pourquoi ?

2- Modifier cette donnée de façon que les événements A et B soient indépendants.

3- En conservant cette nouvelle donnée, déterminer la valeur de $P_A(B)$.

Exercice n° 7 (enseignement obligatoire)

On donne ci-dessous les variations d'une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, et on nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

x	$-\infty$		0		4		9		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Répondre, par VRAI ou FAUX, aux questions suivantes (une justification est demandée lorsque la réponse est FAUX, aucune justification n'est demandée lorsque la réponse est VRAI) :

1- Pour tout réel x, $f(x) \geqslant -2$.

2- L'équation $f(x) = -3$ admet au moins une solution dans $\mathbf{R}$.

3- L'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans $[4, 9]$.

4- Pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$.

5- $f'(1) < 0$.

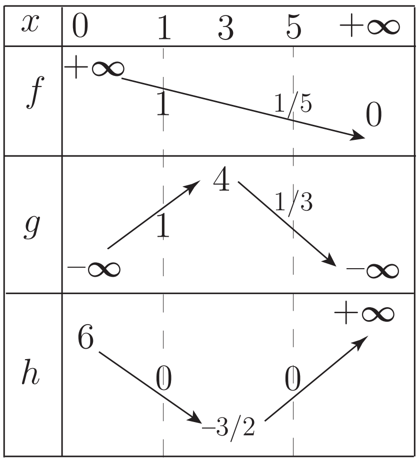
6- La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

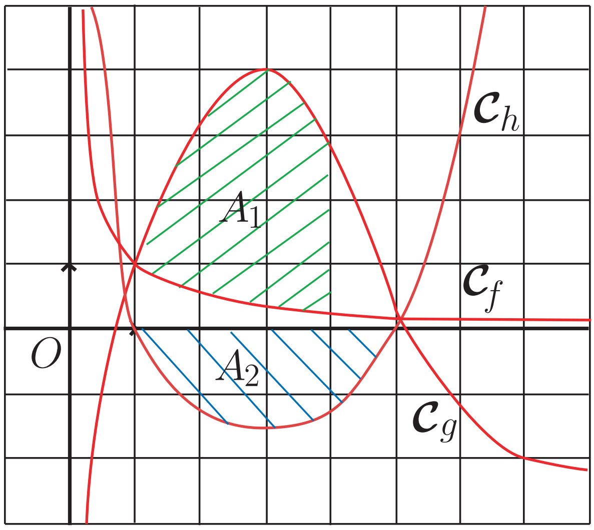
7- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

8- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,f(x)} = +\infty$.

Exercice n° 8 (enseignement obligatoire)

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), on donne les tableaux de variations et les trois représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ respectives des fonctions $f,\ g,\ h$ définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$:





1- Exprimer à l'aide d'intégrales, les mesures, exprimées en cm^2, des aires des domaines plans A_1 et A_2.

2- Sachant que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calculer à 0,1cm^2 près, la mesure de l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

3- Sachant que sur l'intervalle $[1, 3]$, $1 \leqslant g(x) \leqslant 4$, en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

4- Déterminer le signe des intégrales suivantes en justifiant précisément chacune des réponses :

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^3 -g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^2 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

5- Comparer les nombres $I,\ J,\ K$ définis par :

$$I = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x \qquad K = \int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

6- Calculer, à 0,1 près, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1, 4]$.

Exercice n° 9 (enseignement obligatoire)

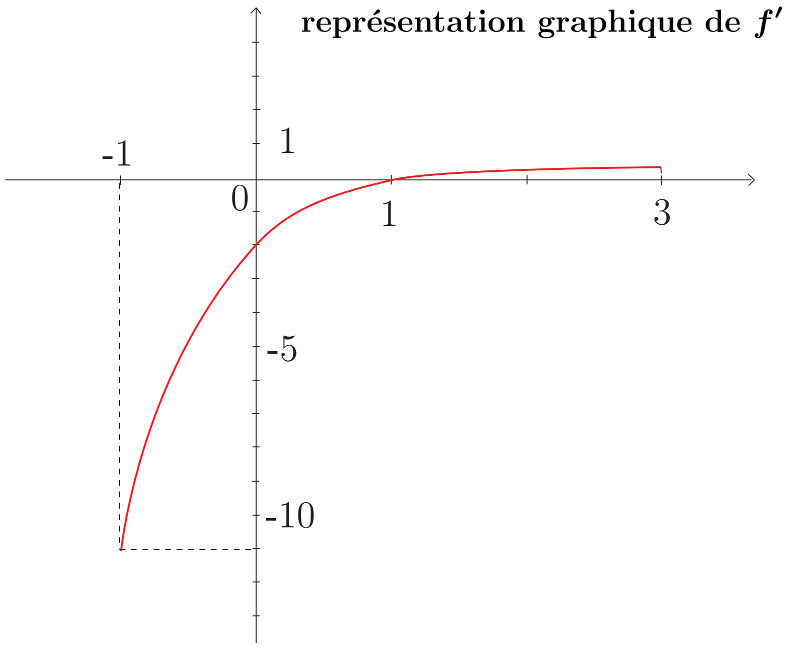
Première partie

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1,\ 3]$. La fonction f' est strictement croissante et admet comme valeurs particulières :

$$f'(-1) = -11 \qquad f'(0) = -2 \qquad f'(1) = 0 \qquad f'(3) = 0,3.$$

1- Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1,\ 3]$ l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.

2- La fonction f admet-elle sur l'intervalle $[-1,\ 3]$ un maximum en 1 ? Justifier.



Deuxième partie

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-1,\ 3]$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2+2x}$.

Démontrer que g admet un maximum en 1.

Troisième partie

Déterminer une fonction h, définie sur l'intervalle $[-1,\ 3]$, qui admet un minimum en 1. On exprimera $h(x)$ en fonction de x.

Exercice n° 10 (enseignement obligatoire)

Dans ce questionnaire à choix multiples, sur chaque ligne, deux affirmations sont proposées, ***au moins une est vraie****. On demande d'écrire dans chaque case si le résultat proposé est vrai ou faux.*

Aucune justification n'est demandée.

Un certain nombre de points est affecté à chaque case. Une réponse correcte rapporte alors le nombre de points affecté, une réponse incorrecte enlève la moitié du nombre de points affecté. Le candidat peut décider de ne pas se prononcer sur certains résultats. Il ne gagne alors aucun point et n'en perd aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Soit a un réel strictement positif : $$\ln\left(\frac{a^2}{25}\right) = \cdots$$	$2(\ln a - \ln 5)$	$\ln(a^2) - 2\ln 5$
L'inéquation $2\ln(1-x) - \ln(x+5) \leqslant 0$ a pour ensemble de solutions :	$[-2,\ 1[$	$[-1,\ 1[$
La dérivée de la fonction g, définie sur $]0,\ +\infty[$ par $g(x)) = (-1+\ln x)^2$ est donnée par $g'(x) = \cdots$	$-2+2\ln x$	$\dfrac{-2+2\ln x}{x}$
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, D est la droite d'équation $y = x+3$ et C la courbe représentative de la fonction f, définie sur $]0,\ +\infty[$ par $f(x) = 3 + x - 2\dfrac{\ln x}{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	la droite D est asymptote oblique à C, en $+\infty$

Exercice n° 11 (enseignement obligatoire)

Une entreprise envisage de lancer sur le marché une gamme de nouveaux produits. Dans le tableau ci-dessous figure une partie des résultats d'une enquête réalisée pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels (noté y_i) en fonction du prix de vente des produits en euros (noté x_i).

x_i	30	50	70	80	90	100
y_i	632	475	305	275	266	234

On décide d'effectuer le changement de variable $z_i = \ln(y_i)$.

1- Compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs de z_i à 10^{-4} :

x_i	30	50	70	80	90	100
z_i						

2- Dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$, construire le nuage de points $(x_i,\,z_i)$ et placer le point K de coordonnées $\left(\overline{x},\,\overline{z}\right)$, $\overline{x}$ et $\overline{z}$ étant les moyennes respectives des x_i et des z_i.

3- Donner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $z = ax + b$ (a et b seront donnés à 10^{-4} près par excès). Tracer la droite sur le graphique précédent.

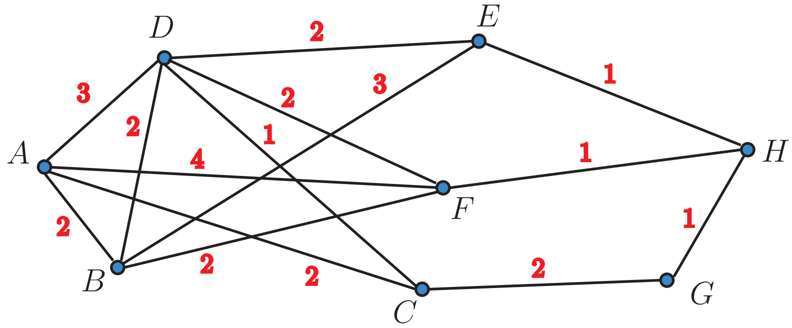
4- En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels y, en fonction de x, sous la forme $y = C\mathrm{e}^{-kx}$ (C et k étant des constantes avec C arrondi à l'entier le plus proche) .

5- Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu à 75€.

Exercice n° 12 (enseignement de spécialité)

Dans la plaine du Serengeti, en Tanzanie, huit prés sont identifiés par les lettres A, B, C, D, E, F, G et H. Un troupeau de zèbres doit partir du pré A pour rejoindre le pré H en se déplaçant de pré en pré. Pour passer directement d'un pré à l'autre, les zèbres peuvent, dans certains cas, emprunter un chemin. Tous les chemins traversent un certain nombre de rivières. Bien entendu, la traversée d'une rivière est extrêmement dangeureuse pour les zèbres à cause des crocodiles qui les attendent impatiemment.

Les chemins possibles entre les prés sont représentés par les arêtes du graphe ci-dessous, dont les sommets représentent les prés. Le nombre de rivières coupant un chemin est le poids affecté à l'arête représentant ce chemin. Le poids de chaque arête est indiqué sur le graphe.



1- Déterminer le nombre minimal de fleuves que les zèbres devront traverser, en remplissant le tableau situé sur la feuille annexe. Indiquer alors leur itinéraire.

2- Existe-t-il d'autres parcours donnant ce même nombre minimal de fleuves ? Si oui, les donner tous.
