Résolution de problèmes à l'aide de graphes.

Cette partie du programme pour la spécialité mathématiques de la classe de Terminale ES présente deux nouveautés fondamentales qui la caractérisent :

- une ouverture sur une théorie qui n'est pas enseignée dans l'enseignement secondaire français ;
- une proposition de travail axée sur la seule résolution de problèmes.

Pourquoi ces éléments de la théorie des graphes ?

Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure : on trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs les problèmes résolus constituent une première approche – volontairement modeste – de situations complexes (gestion de stocks, transports à coûts minimaux, recherche de fichiers dans des ordinateurs, reconnaissance de mots, gestion des files d'attente, …) auxquelles les élèves pourront être par la suite confrontés. Ce choix peut aider un certain nombre d'élèves à (re)trouver goût aux mathématiques : la nouveauté des objets mathématiques manipulés devrait susciter leur adhésion, et leur caractère relativement élémentaire éviter tout découragement au long de l'année. Pour beaucoup d'élèves, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire : ouvrir sur la théorie des graphes, c'est ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est entraîner à avoir un autre regard mathématique et à progresser. Enfin le travail fait sur les graphes pourra permettre le traitement de sujets de TPE (problèmes de flot maximum, d'ordonnancement, etc.).

Pourquoi un travail axé sur la seule résolution de problèmes ?

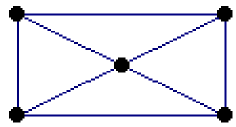
Toute présentation théorique magistrale serait contraire au choix fait ici. L'essentiel du travail réside dans la résolution de problèmes : résolution laissant place à l'initiative des élèves, avec dans un premier temps ses essais et tâtonnements, ses hésitations pour le choix de la représentation en terme de graphe (quels objets deviennent arêtes ? lesquels deviennent sommets ?), et débouchant sur une modélisation précise, la recherche d'une solution et d'un raisonnement pour conclure. On trouvera ci-dessous une liste de problèmes : cette liste pourrait être considérée comme une liste de référence ; on pourra remplacer les problèmes proposés par des variantes sur des sujets tout à fait différents, pourvu qu'ils permettent d'aborder les mêmes problématiques relatives aux graphes. Chaque exemple est suivi d'une liste de contenus qu'il permet d'introduire ou d'illustrer, contenus qui devront être compris et utilisés par les élèves ; un lexique en fin de document reprend la totalité des termes et les propriétés à connaître sont données dans un dernier paragraphe. L'optique est la résolution de problèmes, et c'est le bon usage des termes et non la capacité de les définir formellement qui est recherchée. L'intérêt du lexique final est par ailleurs de bien marquer des limites à ce qui est proposé : toute notion relative à la théorie des graphes qui ne correspond pas à l'un des termes du lexique n'est pas au programme.

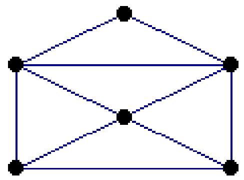
Pour bien marquer ces caractéristiques de cette partie du programme, le texte officiel (publié ensuite au BO) pourra être présenté selon les mêmes modalités (exemples de référence et contenus associés, lexique).

Dans les exemples ci-dessous, on a parfois en plus construit les graphes et donné quelques éléments de réponse afin d'avoir assez vite une idée d'ensemble de ce qui est proposé : ces éléments de réponse pourraient être plus détaillés dans un document d'accompagnement. La théorie des graphes est rarement abordée en France lors des cursus universitaires suivis par les enseignants : il s'agira donc d'une nouveauté pour la plupart d'entre eux ; néanmoins, comme s'exerce dans ce domaine un mode de pensée auxquels ils ont habitués, ils peuvent envisager cet enseignement sans inquiétude tant pour eux-mêmes que pour leurs élèves (les graphes concernent une heure-année environ).

Exemple 1

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?

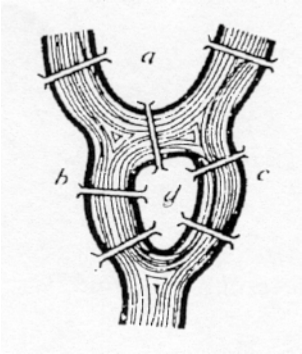


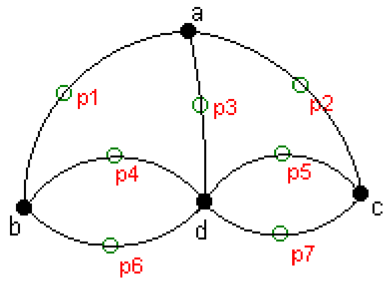


Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet , chaîne eulérienne ; théorème d'Euler.

Exemple 2 - Les ponts de Königsberg

Au 18ème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie, frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?



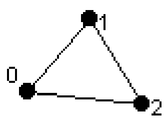


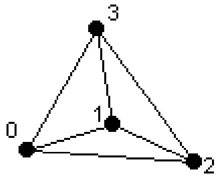
Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ;cycle eulérien.

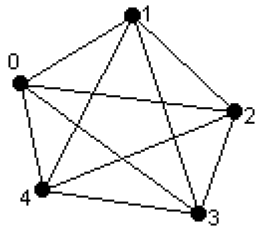
Exemple 3

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ?

On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n, pour $n = 2, 3, 4, \ldots$





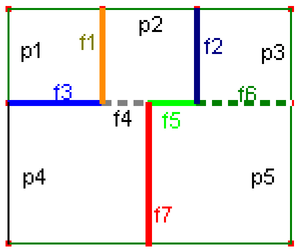


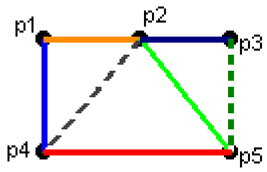
Une arête représente un domino. Il faut trouver une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes une fois et une seule. On ne s'est pas occupé ici des «doubles » puisqu'on peut toujours les intercaler.

Contenu : graphes complets ; chaînes eulériennes ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.

Exemple 4

Cinq pays sont représentés ci-contre avec leurs frontières.
Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une et une seule fois ?

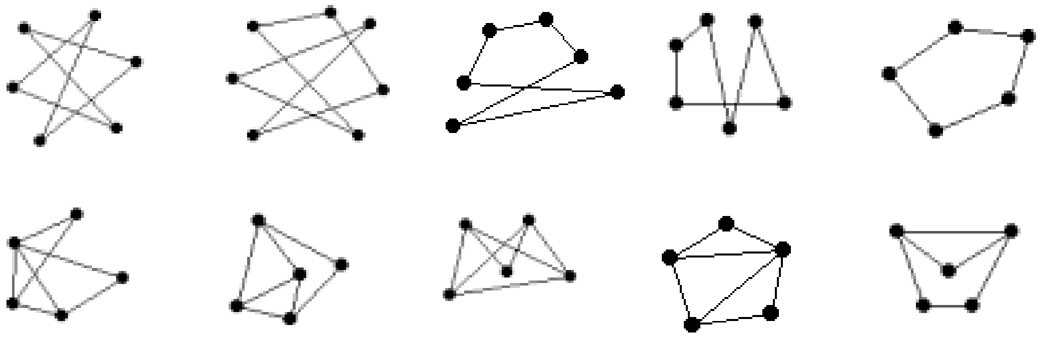




Contenu : chaîne eulérienne ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.

Exemple 5

Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



Contenu : représentations de graphes

Exemple 6

Comparer les quatre graphes définis ainsi :

- on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;
- on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;
- les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de {1,2,3,4} ; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide ;
- trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

Contenu : représentations de graphes ; sommets, sommets adjacents ; arêtes.

Exemple 7

Une ligue de foot comporte 5 équipes.

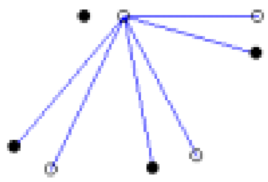
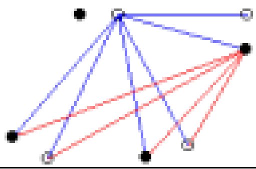
Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera 4 matchs. Comment l'organiser ?

Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que 3 matchs. Comment l'organiser ?

Contenu : degré d'un sommet ; lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes.

Exemple 8

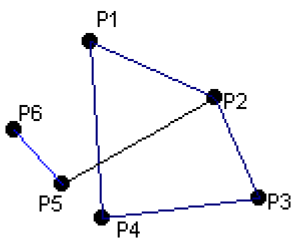
M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne se serre la main à lui même et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangées avec les autres membres de la réunion ?

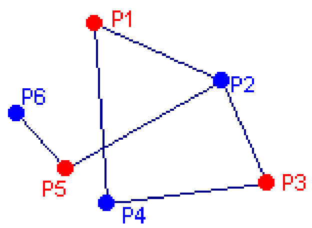
Une personne peut serrer la main d'au plus 6 autres personnes. Pour que le nombre de poignées de mains échangées soient tous distincts, il s'agit nécessairement des nombres 6, 5, 4, 3, 2, 1 et 0.	Il y a une personne qui a échangé 6 poignées de main ; c'est donc son conjoint qui n'en a échangé aucune. 	Il y a une personne qui échange 5 poignées de mains ; c'est donc son conjoint qui en échange une seule. 	Il y a une des personnes des deux couples non encore considérés qui échange 4 poignées de main , donc son conjoint en échange 2. Que reste-t-il pour le dernier couple ?

Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet.

Exemple 9

On trouvera ci-dessous le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques. Quel est le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport ?

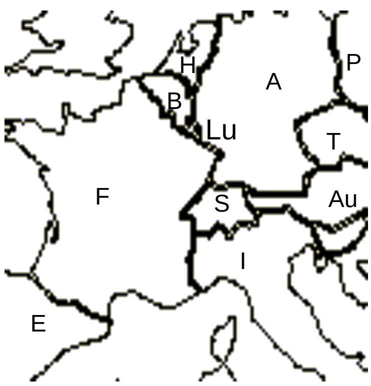


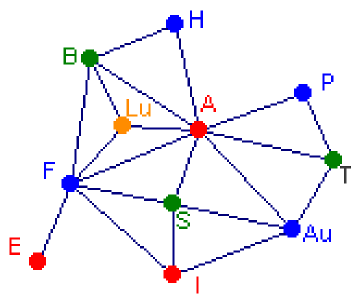


Contenu : nombre chromatique.

Exemple 10

On veut colorier chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent. (Deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs ne sont pas considérés comme voisins).





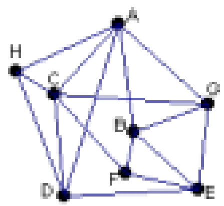
Contenu : sous –graphe complet ; nombre chromatique.

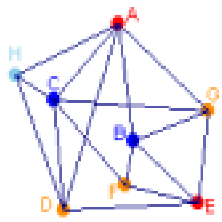
Exemple 11

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans la matrice ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans un même aquarium :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x	x			x	x
B	x				x	x	x	
C	x			x		x	x	x
D	x		x		x			x
E		x		x		x	x	
F		x	x		x			
G	x	x	x		x			
H	x		x	x				

Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?





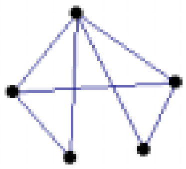
Contenu : matrice associée à un graphe ; sous-graphe ; graphe complet ; nombre chromatique.

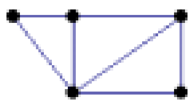
Exemple 12

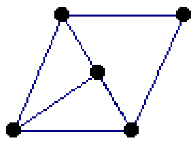
Tracer les graphes associés aux matrices ci-dessous et chercher leur nombre chromatique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

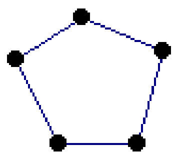
Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à C ?







Donner des matrices associées au graphe suivant :



Contenu : matrices et graphes associés ; nombre chromatique.

Exemple 13

On veut organiser un examen dans une école d'ingénieurs ; il y a 6 options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel(D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont :

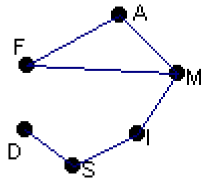
F,A,M D,S I,S I,M

1- Quel est le nombre maximum d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle ?

2- Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

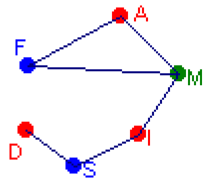
Solution :

Graphe associé



1- Tout sous-graphe de plus de trois sommets comporte des arêtes ; deux sous-graphes d'ordre trois (de sommets respectivement A,D,I et F,D,I) n'ont pas d'arêtes : le nombre maximum d'épreuves en parallèle est 3.

2- il y a un sous-graphe complet d'ordre 3 ; le nombre chromatique est au moins égal à 3 ; on voit que 3 couleurs suffisent.



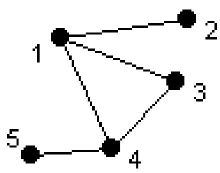
Contenu : sous- graphes ; graphe complet ; nombre chromatique.

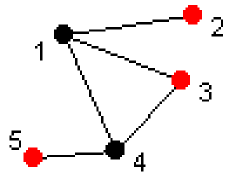
Exemple 14

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir le maximum de magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble en nocturne ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert en nocturne parmi les magasins 1, 3, 4.

Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

Solution





Il n'y a qu'un seul sous-graphe a trois éléments sans arêtes ; tous les sous-graphes d'ordre 4 ou 5 ont des arêtes.

Contenu : sous-graphes.

Exemple 15

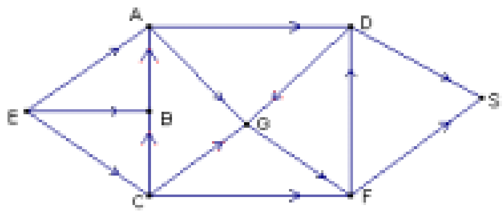
Ci-après, la matrice M est associée à un graphe orienté G. Tracer le graphe et interpréter les termes de M^2, puis de M^3.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté ; longueur d'une chaîne.

Exemple 16

Pour traverser une chaîne de montagne, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4 ou 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).



Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S

$$\text{on a : } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2
La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4
La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5
La première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6
La première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

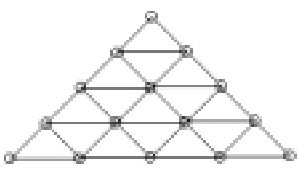
Trouver toutes les traversées en 4 ou 5 ou 8 étapes.

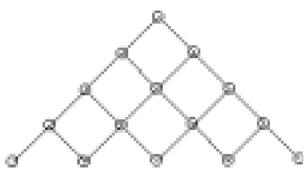
Contenu : graphe orienté ; matrice associée à un graphe orienté.

Exemple 17

On cherche à colorier les graphes ci-dessous de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur.

- Montrer que dans le graphe 1 ci-dessous, trois couleurs sont nécessaires. Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de coloriages possibles ?
- Montrer que pour le graphe 2 ci-dessous, deux couleurs suffisent.


(1)


(2)

Contenu : coloriage, sous-graphes complets .

Exemple 18

Algorithme de coloriage d'un graphe :

On ordonne les sommets par ordre de degrés décroissants.

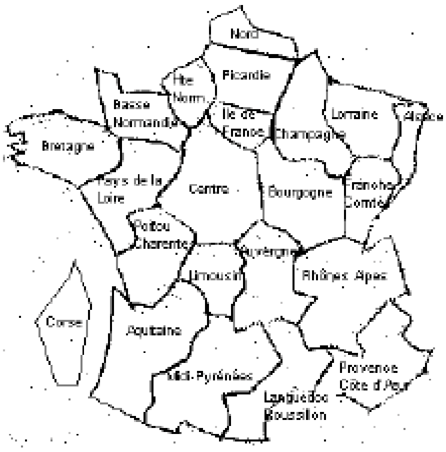
Tant qu'il reste des sommets à colorier, exécuter les actions suivantes :

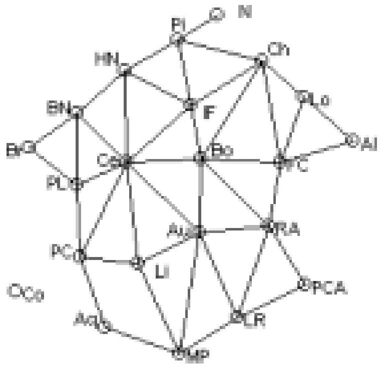
- *choisir une nouvelle couleur appelée couleur d'usage ;*
- *chercher dans la liste ordonnée des sommets le premier sommet non colorié et le colorier avec la couleur d'usage ;*
- *colorier avec la couleur en usage et en respectant leur ordre, tous les sommets non coloriés non adjacents au dernier sommet colorié, et non adjacents entre eux.*

Remarque : cet algorithme fournit un coloriage, mais le nombre r de couleurs utilisées peut-être supérieur au nombre chromatique. D'où l'intérêt éventuel de comparer r à un minorant r' du nombre chromatique : si r = r', c'est le nombre chromatique.

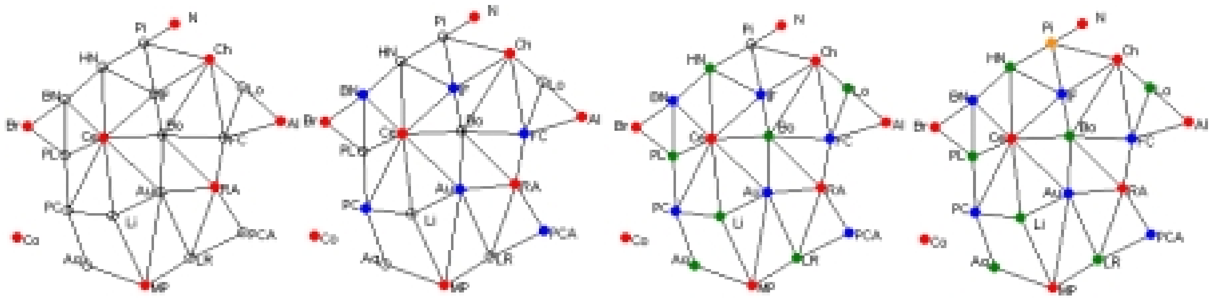
On veut colorier chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur.

- Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs.
- Appliquer l'algorithme ci-dessus.





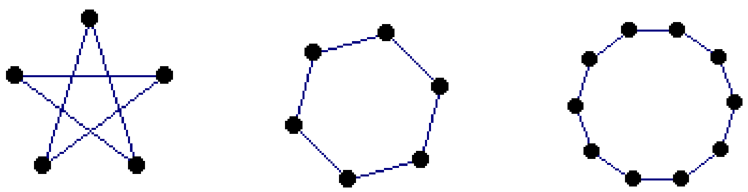
Coloriage après avoir ordonné les sommets suivants l'ordre décroissant de leur degré



Contenu : coloriage ; nombre chromatique.

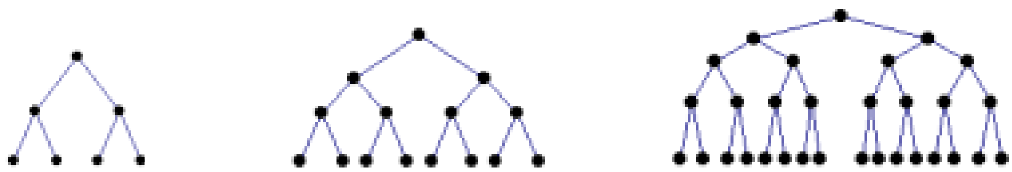
Exemple 19

a) Caractériser les graphes de diamètre 1.Trouver le diamètre des graphes ci-dessous.

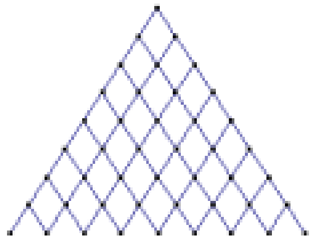


b) Quels sont les diamètres des graphes ci-dessous ?

Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre ?



c) Quel est le diamètre du graphe ci-dessous ? Si on « continuait » ce graphe, comment évoluerait l'ordre du graphe en fonction du diamètre ?



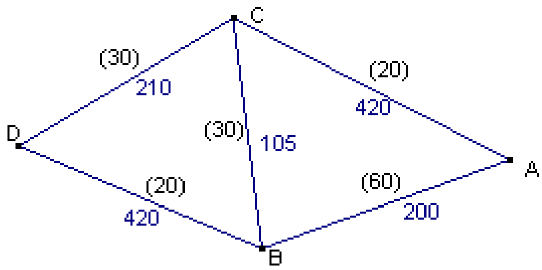
Contenu : diamètre d'un graphe.

Exemple 20

Sur les arêtes du graphe suivant, représentant un réseau autoroutier, on a marqué les distances entre deux étapes et, entre parenthèses, les prix des péages.

Entre D et A, déterminer :

- la chaîne la plus courte ;
- la chaîne qui minimise la somme dépensée en péage.

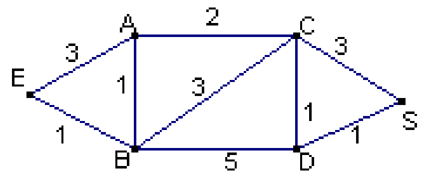


Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne, plus courte chaîne.

Exemple 21

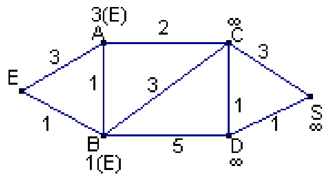
Algorithme de la plus courte chaîne entre un sommet E et un sommet S.

Exemple :



Initialisation :

On affecte le poids 0 à E et on attribue provisoirement aux sommets adjacents à E les poids des arêtes qui les relient à E, et aux autres sommets le poids +∞. On pose



Dans la suite, ✓ désignera l'ensemble des sommets dont le poids est fixé.

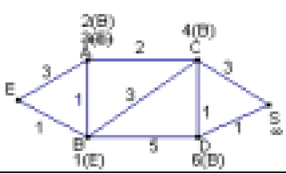
Tant que ✓ ne contient pas l'ensemble des sommets et tant que le sommet S qu'on veut atteindre n'est pas affecté du plus petit des poids provisoires, exécuter les actions suivantes :

- Parmi tous les sommets provisoirement pondérés, fixer définitivement le poids d'un de ceux qui ont un poids minimum ; soit T ce sommet.

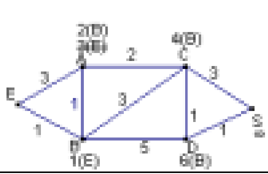
- Ajouter T à ✓.

- Pour tout sommet T' n'appartenant pas à ✓ et adjacent à T, calculer la somme s du poids de T et du poids de l'arête reliant T à T' ; si s est inférieur au poids provisoire de T', affecter s à T' comme nouveau poids provisoire, et le noter s(T) pour marquer ainsi la provenance de cette dernière affectation.

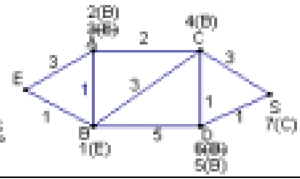
Poids de B fixé



Poids de A fixé



Poids de C fixé

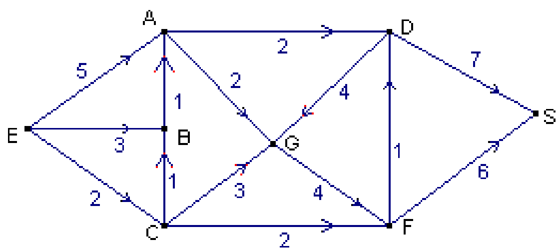


On peut représenter les différentes étapes de l'algorithme, exécuté sur cet exemple, par un tableau où figurent à droite les éléments successifs de ✓ :

E	A	B	C	D	S	✓
0	3(E)	1(E)	∞	∞	∞	E
	2(B)	*1(E)*	4(B)	6(B)		E,B
	2(B)					E,B,A
			4(B)	5(C)	7(C)	E,B,A,C
				5(C)	6(D)	E,B,A,C,D
					6(D)	E,B,A,C,D,S

La plus courte chaîne a un poids 6 ; elle se lit ici à l'envers SDCBE : S a un poids 6 venant de D, D est pondéré à partir de C, C à a partir deB, B à partir de E.

Le même algorithme s'applique aux graphes orientés. Exemple :



E	A	B	C	D	F	G	S	✓
0	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞	E
			2(E)		4(C)	5(C)		E,C
	4(B)	*3(E)*						E,B,C
	4(B)			6(A)				E,B,C,A
				5(F)	*4(C)*		10(F)	E,B,C,A,F
				5(F)				E,B,C,A,F,D
						5(C)		E,B,C,A,F,D,G
							10(F)	E,B,C,A,F,D,G,S

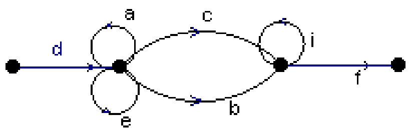
La chaîne la plus courte se lit à l'envers sur le tableau : S,F,C,E. Elle a pour longueur 10.

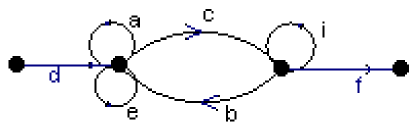
Contenu : graphe pondéré ; poids d'une chaîne ; plus courte chaîne.

Exercice 22

Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci-dessous ; un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par d et terminant par f, associée à une chaîne de ce graphe.

- Les mots « decif » et « daaeebiif » sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquetés ci-dessous ?
- Donner, pour chaque graphe ci-dessous, la liste des mots de 5 lettres reconnus.
- Caractériser pour chaque graphe les mots reconnus.
- Caractériser les mots reconnus par les deux graphes ci-dessous.





Contenu : graphe étiqueté.

Exercice 23

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

1- Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'états.

2- Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.

3- Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.

4- Vérifier qu'on a $M = N + (1/2)R$ où $N = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.Calculer N^2,R^2 et NR. En déduire M^n.

5- Au jour 0, le réverbère est allumé (resp. éteint). Calculer la probabilité p_n (resp. p'_n)que le réverbère soit allumé (resp. éteint) au $n^{\text{ième}}$ matin. Faire le lien avec les résultats des simulations observées en 1.

Remarque . On peut varier cet exemple en utilisant l'égalité matricielle suivante, où a et b sont des nombres dans]0,1[, et en calculant ainsi aisément la puissance n-ième d'une matrice de transition associée à un graphe probabiliste :

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/(a+b) & b/(a+b) \\ a/(a+b) & a/(a+b) \end{pmatrix} + (1-a-b)\begin{pmatrix} a/(a+b) & -b/(a+b) \\ -a/(a+b) & b/(a+b) \end{pmatrix}$$

Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.

Exercice 24

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X, calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10 ans.

Que se passe-t-il si on suppose que 99% des habitants sont initialement en Y ou en X ? que la population est également répartie entre les deux villes (500 000 dans chaque ville en l'année 0) ? Que constate-t-on ?

Remarque : on pourra refaire le problème en variant, non plus les conditions de départ, mais les coefficients de transition : 15% et 5%, ou 40% et 20%, par exemple.

Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition.

Exercice 25

Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer suivant les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1.
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5.
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition. Calculer (avec une calculatrice ou un ordinateur) la probabilité qu'il soit malade ou immunisé au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans, pour chacune des situations suivantes :

- au départ, il est immunisé,
- au départ, il est non malade et non immunisé,
- au départ, il est malade.

Pouvez-vous donner des éléments sur la proportion d'individus malades dans la population étudiée ?

Solution : Au bout d'un an, de deux ans, de trois ans, etc. quel que soit l'état initial, l'individu considéré a une probabilité 0,755 d'être immunisé, 0,151 d'être non malade et non immunisé, 0,094 d'être malade ; la maladie touche donc en permanence environ 9,4% de la population.

Contenu : graphe probabiliste ; matrice de transition ; état probabiliste.

Lexique

La plupart des termes de ce lexique correspondent à leur sens intuitif et ne doivent pas faire l'objet de définitions formelles ; les termes seront introduits peu à peu à partir des exercices. L'objectif de ce lexique est de délimiter le champ du type d'exercices à proposer : le vocabulaire donné ci-dessous doit suffire pour les résoudre.

Pour les graphes non orientés, la terminologie proposée est celle qui est la plus répandue dans les ouvrages de langue française. Dans le cas d'un graphe orienté, on rajoute l'adjectif "orienté", lorsque c'est nécessaire. Le GEPS consultera divers spécialistes de la théorie des graphes à propos de cette terminologie.

Graphes non orientés

Un **graphe** est composé **d'arêtes** et de **sommets**. Deux sommets liés par une arête sont dits **adjacents** (ou voisins). Le nombre de sommets est l'**ordre** du graphe.

La **matrice associée à un graphe** d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n, est une matrice symétrique à n lignes et à n colonnes, le terme au croisement de la ligne i et de la colonne j vaut k, où k est le nombre d'arêtes reliant i et j ; on se restreindra le plus souvent aux graphes tels qu'il existe au plus une arête reliant deux sommets et la matrice associée ne contient alors que des 0 et des 1. Le nombre d'arêtes dont une extrémité est un sommet du graphe est appelé le **degré** de ce sommet ; un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe G' composé de certains sommets de G et de toutes les arêtes de G joignant deux sommets de G'.

Un **graphe complet** est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

Une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant ; une chaîne pourra être décrite par la liste ordonnée des arêtes qui mènent d'un sommet de la liste au sommet suivant ; la **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui le composent.

Un **chemin fermé** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues ; un cycle est un chemin fermé composé d'arêtes toutes distinctes ; la **distance** entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient ; le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux points.

Une chaîne **eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si cette chaîne est un cycle, on l'appelle **cycle eulérien**.

Le **nombre chromatique** est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.

Graphes orientés

Un graphe **orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées (on parlera alors d'arête orientée, de l'origine et de l'extrémité d'une arête). On peut définir une chaîne, une chaîne eulérienne etc.

La **matrice associée à un graphe orienté** d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n, est une matrice à n lignes et à n colonnes, le terme au croisement de la ligne i et de la colonne j vaut 1 s'il y a une arête orientée dont l'origine est i et l'extrémité j et 0 sinon. Une boucle est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes.

Un **graphe étiqueté** est un graphe orienté, dont les arêtes orientées sont affectées d'étiquettes. Si toutes les étiquettes sont des nombres positifs, on dit qu'on a un graphe pondéré. Dans un graphe pondéré, le **poids d'une chaîne** est la somme des poids des arêtes orientées qui le composent. Une **plus courte chaîne** entre deux sommets est, parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes orientées sortant de chaque sommet donné vaut 1.

La **matrice de transition** associée à un graphe probabiliste d'ordre n comporte n lignes et n colonnes ; le terme situé au croisement de la ligne i et de la colonne j a pour valeur le poids de l'arête orientée ayant pour origine le sommet i et pour extrémité le sommet j si une telle arête orientée existe, 0 sinon. Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un individu pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles de l'individu et le poids d'une arête orientée issue d'un sommet i et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j.

Un état probabiliste de l'individu est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles ; cette loi sera toujours représentée ici par une matrice ligne. Un graphe probabiliste peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants, chaque composant pouvant être dans différents états possibles.

L'état du système à une date donnée est la matrice ligne donnant le nombre de composants du système dans chaque état.

Propriétés

Les propriétés ci-dessous pourront être soit démontrées soit commentées. Elles devront être connues des élèves. Elles seront introduites à propos de certains exercices.

- La somme des degrés des sommets d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
- Soit A la matrice associée à un graphe. Le terme (i, j) de la matrice A^n donne le nombre de chaînes de longueur n reliant les sommets i et j.
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à r+1, où r est le plus grand degré des sommets.
- Théorème d'Euler : un graphe admet un chaîne eulérienne ssi tous ses sommets sont d'ordre pair sauf au plus deux. Un graphe admet un cycle eulérien ssi tous ses sommets sont d'ordre pair.
- Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste à n sommets, si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état, ou l'état probabiliste, à l'étape n, on a : $P_n = P_0M^n$.
- Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, l'état (resp. état probabiliste) P_n à l'étape n converge vers un état (resp. état probabiliste) P, indépendant de l'état initial P_0. De plus, P vérifie : P = PM.