

P rogramme de spécialité

Arithmétique

L'arithmétique, ayant pour objet l'étude des nombres entiers, est une des branches les plus élémentaires des mathématiques. Avec peu d'outils théoriques, on y démontre des résultats non triviaux. C'est aussi l'une des branches les plus difficiles et l'une des seules où des conjectures et des théorèmes dont l'étude théorique est redoutable peuvent être facilement énoncés. Sa place dans l'enseignement de spécialité se justifie à plusieurs titres :

- son introduction dans l'enseignement de spécialité, à l'occasion de la précédente rénovation de programme, a été un succès tant auprès des élèves que des enseignants ;
- il paraît judicieux de proposer dans la partie spécialité un chapitre relativement indépendant du programme du tronc commun : c'est le cas avec l'arithmétique, peu étudiée dans le cursus antérieur, et que l'on peut aborder sans être pénalisé par d'éventuels échecs dans d'autres chapitres ;
- les applications de l'arithmétique (codages, clés de contrôle...) ont remis ce domaine sous les feux de l'actualité : l'étude de ce chapitre donne quelques éléments pour mieux comprendre les enjeux de ces applications ;
- la démarche mathématique comporte des phases expérimentales que les documents d'accompagnement ont soulignées à plusieurs reprises ; c'est particulièrement le cas en arithmétique où des calculs à la main ou avec une machine permettent de conjecturer des résultats. Quant aux démonstrations, elles revêtent souvent un caractère original (en comparaison de celles présentes en géométrie ou analyse) et formateur ;
- enfin, il ne faut pas négliger la possibilité de construire quelques algorithmes simples puis de les mettre en œuvre sur calculatrice programmable ou tableur.

Division euclidienne

On étendra la division aux éléments de \mathbb{Z} , le diviseur étant un entier naturel et le reste un entier naturel strictement inférieur au diviseur.

Si le tableur ou la calculatrice utilisée par l'élève ne permet pas une division euclidienne directe avec des dividendes négatifs, la mise en place d'un programme de calcul peut être envisagé. On évitera d'étendre cette division aux diviseurs négatifs : les congruences se feront toujours modulo un entier naturel et une telle extension n'apporte ici rien de plus.

Équations diophantiennes

Diophante d'Alexandrie, vers les années 250 de notre ère, recherchait déjà systématiquement les solutions en nombres entiers (ou rationnels) d'une équation ou d'un système d'équations ; d'où le nom d'équations diophantiennes donné aux équations polynomiales à coefficients entiers dont on cherche des solutions entières (ou rationnelles).

Les exemples qui suivent montrent la diversité des méthodes que l'on peut mettre en œuvre pour résoudre, au niveau de la terminale, de telles équations.

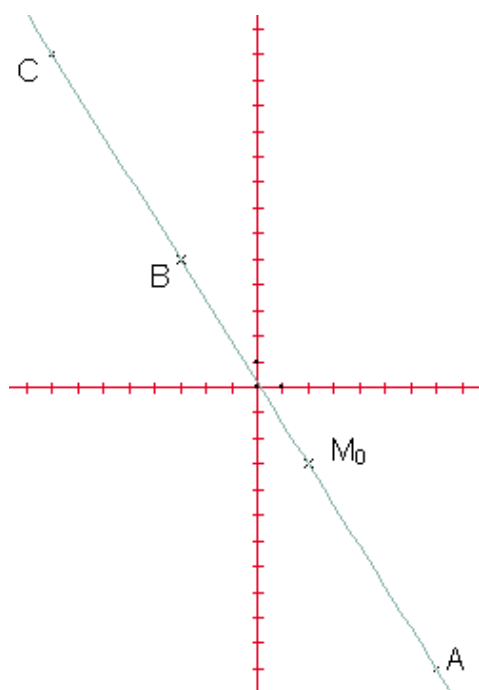
1) On pourra commencer par étudier quelques équations dont le traitement est simple :

- $5x^2 + y^2 = 45$ (peut se résoudre par essais successifs puisque x et y sont bornés).
- $2x^2 - y^2 = 5$. En raisonnant modulo 5, on montre qu'il n'y a pas de solution.
- $7x^2 + 2y^3 = 3$. En raisonnant modulo 7, on montre qu'il n'y a pas de solution.

En dehors des cas où on peut balayer en un temps manifestement court l'ensemble des nombres où peut se trouver la solution, serait-il plus simple de démontrer qu'il n'y a pas de solutions que de les trouver toutes ? Les exemples ci-dessous illustrent cette interrogation.

2) Étude de l'équation $ax + by = c$ où a, b, c sont des entiers relatifs non nuls ; on cherche des solutions dans \mathbb{Z}^2 .

On pourra motiver l'étude de cette équation par la recherche des points à coordonnées entières situés sur une droite dont la pente et l'ordonnée à l'origine sont des nombres rationnels.



a) Un exemple :

Si on connaît une solution, on sait trouver les autres, selon la méthode illustrée ci-dessous.

L'équation $8x + 5y = 1$ a au moins une solution dans \mathbb{Z}^2 : $x_0 = 2, y_0 = -3$ (point M_0 sur le dessin ci-contre).

Par suite (x, y) est solution de l'équation si :

$8(x - x_0) + 5(y - y_0) = 0$. Doù une relation de proportionnalité entre $x - x_0$ d'une part et $y - y_0$ d'autre part.

Ce qui conduit à :

$$x = 2 + 5k \text{ et } y = -3 - 8k, k \in \mathbb{Z}.$$

A, B, C représentés ci-contre correspondent respectivement à $k = 1, -1$ et -2 .

b) La recherche d'une solution particulière de l'équation peut se faire de façon intuitive, par balayage ou en utilisant l'algorithme d'Euclide.

– Par balayage. Prenons l'exemple numérique suivant : $47x + 35y = 1$.

On peut écrire $y = -47/35x + 1/35$, essayer toutes les valeurs de x de 0 à 34 jusqu'à trouver une valeur entière de y . On peut démontrer que si l'on n'en trouve pas entre 0 et 34, alors l'équation n'a pas de solution. Cela conduit à un algorithme simple à mettre en place mais peu performant car induisant des temps de calcul importants lorsque que l'entier b est grand.

– En utilisant l'algorithme d'Euclide. Reprenons l'équation $47x + 35y = 1$:

$47 = 35 \times 1 + 12$; $35 = 12 \times 2 + 11$ et $12 = 11 \times 1 + 1$ (ce qui prouve en passant que 47 et 35 sont premiers entre eux). En « remontant » on obtient alors :
 $1 = 12 - 11 \times 1 = 12 - (35 - 12 \times 2) = 3 \times 12 - 35 = 3 \times (47 - 35 \times 1) - 35 = 3 \times 47 - 4 \times 35$.

$x = 3$ et $y = -4$ sont donc solutions de $47x + 35y = 1$.

L'algorithme d'Euclide pour a et b entiers strictement positifs permet ainsi l'obtention rapide du P.G.C.D. mais la « remontée », utile pour obtenir une solution particulière comme ci-dessus pour 47 et 35, nécessite la mise en mémoire des résultats intermédiaires.

Algorithme de calcul de P.G.C.D.

Donnée : deux entiers a et $b, a > b$.

Résultat : P.G.C.D.(a, b).

Règle :

tant que $b > 0$, faire

$r \leftarrow a - b * \text{ent}(a / b)$

//reste dans la division euclidienne de a par b

$a \leftarrow b$

$b \leftarrow r$

Retourner a

Dans l'écriture ci-dessus, la ligne $b \leftarrow r$ signifie que dans le registre noté b , on met la valeur r ou le contenu d'un registre dont le nom est r . « Retourner a » signifie que le résultat de l'algorithme est dans le registre dont le nom est a . Les phrases en italiques

précédées de // sont des commentaires et ne font pas partie de l'algorithme. L'écriture de tels algorithmes n'est pas standardisée ; bien que ce ne soit pas exigible, il est utile que les élèves sachent lire et comprendre une écriture ci-dessus ou une du même genre.

Algorithme « avec remontée »

L'algorithme suivant permet d'obtenir les coefficients de l'identité de Bézout (voir aussi sur le cédérom).

Dans le cas où les nombres a et b ne sont pas premiers, il donne les coefficients u et v tels que $ua + vb = \text{P.G.C.D.}(a, b)$:

Donnée : deux entiers a et b , $a > b$.

Résultat : (p, u, v) où $p = \text{P.G.C.D.}(a, b)$, u et v tels que $au + bv = p$.

Règle :

$u1 \leftarrow 1, v1 \leftarrow 0, u2 \leftarrow 0, v2 \leftarrow 1$

tant que $b > 0$ **faire**

$q \leftarrow \text{ent}(a / b), r \leftarrow a - q * b$

//calcul du quotient q et du reste r

$a \leftarrow b, b \leftarrow r,$

//prépare l'étape suivante

$ut \leftarrow u1 - u2 * q$

//détermine z et t tels $r = u2a + v2b$ (a et b données de départ)

$vt \leftarrow v1 - v2 * q, u1 \leftarrow u2, v1 \leftarrow v2$

//détermine $u2$ et $v2$ tels que $r = u2*a + v2*b$, (a et b données de départ)

$u2 \leftarrow ut, v2 \leftarrow vt$

$p \leftarrow a, u \leftarrow u1, v \leftarrow v1$

Retourner (p, u, v)

On pourra suivre pas à pas le « déroulement » de cet algorithme pour $a = 47$ et $b = 35$ jusqu'au résultat final : $p = 1, u = 3$ et $v = -4$.

c) L'étude systématique suivante pourra être envisagée mais aucun résultat n'est exigible.

Dans le cas général de l'équation $ax + by = c$, lorsque c vaut 1, l'existence de solutions est liée au fait que a et b sont premiers entre eux (théorème de Bezout) ; plus généralement, il existe toujours une solution lorsque $c = \text{P.G.C.D.}(a, b)$.

Il n'y a pas de solution lorsque c n'est pas un multiple du P.G.C.D. p de a et b car p divisant a et b diviserait aussi $ax + by$ sans diviser c .

Lorsque c est un multiple de p , en posant $a = pa', b = pb', c = pc'$, l'équation $ax + by = c$ équivaut à $a'x + b'y = c'$ où a' et b' sont premiers entre eux. Il existe donc deux entiers u et v tels que $a'u + b'v = 1$. L'équation précédente s'écrit donc $a'x + b'y = c' (a'u + b'v)$ ou encore :

$a'(x - c'u) = b'(c'v - y)$. D'après le théorème de Gauss b' divise $x - c'u$. Il existe donc un entier k tel que $x = c'u + kb'$ et $y = c'v - ka'$. (Réciproque évidente.)

3) Équation dite « de Pythagore ».

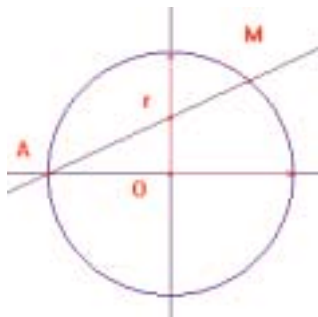
$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

On va chercher les solutions (x, y, z) où x, y et z sont des entiers strictement positifs.

En posant $u = x / z$ et $v = y / z$, l'équation devient :

$$u^2 + v^2 = 1 \quad (2)$$

où u et v sont des nombres rationnels strictement positifs.



On peut avoir une vision géométrique de l'équation (2) : on cherche les points du cercle unité, à coordonnées rationnelles positives. Soit M un tel point, de coordonnées (u, v) , la droite (AM) , où A , de coordonnées -1 et 0 , a pour équation $y = r(x + 1)$, avec $r = v / (u + 1)$, nombre rationnel compris entre 0 et 1 .

Réciproquement, si $y = r(x + 1)$, avec r rationnel compris entre 0 et 1 , alors l'intersection de cette droite avec le cercle trigonométrique est le point de coordonnées :

$$(1 - r^2) / (1 + r^2) \text{ et } 2r / (1 + r^2).$$

C'est donc un point à coordonnées rationnelles. On a ainsi toutes les solutions de (2). La résolution complète de (1) nécessite un argument supplémentaire. En division par le P.G.C.D. de x , y et z , on se ramène au cas où x , y , z sont premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui entraîne ici qu'ils sont premiers entre eux deux à deux. On établit alors que l'un des entiers x ou y est pair, et, après échange éventuel, on suppose que y est pair. On démontre alors l'existence de deux entiers p et q tels que $x = p^2 - q^2$, $y = 2pq$, $z = p^2 + q^2$. Cela résulte de la résolution de (2) et de l'écriture $r = p/q$ (écriture irréductible); il est également possible d'éviter le passage par les solutions rationnelles en partant de la relation $y^2 = (z - x)(z + x)$.

– Une généralisation de l'équation (1) :

On cherche les solutions entières strictement positives de $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = z^2$.

On se ramène comme précédemment à $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = 1$, où u_1, \dots, u_n sont des nombres rationnels positifs.

Supposons qu'on ait une solution (u_1, \dots, u_n) et posons $r_k = u_k/(u_1 + 1)$, $k = 2, \dots, n$.

En remplaçant u_k par $r_k(u_1 + 1)$, on obtient une équation du second degré en u_1 ,

admettant (-1) et $\frac{1 - (r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2)}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2}$ comme racines. On peut alors écrire :

$$u_k = \frac{2r_k}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2}, \quad 2 \leq k \leq n \text{ où les nombres } r_k \text{ sont des rationnels strictement positifs dont la somme des carrés est strictement inférieure à 1.}$$

Réciproquement, partant de nombres r_k , $k = 2, \dots, n$, rationnels strictement positifs

dont la somme des carrés est strictement inférieure à 1, et en posant

$$u_1 = \frac{1 - (r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2)}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2} \text{ et } u_k = \frac{2r_k}{1 + r_2^2 + r_3^2 + \dots + r_n^2}, \quad 2 \leq k \leq n, \text{ on a une solution de l'équation.}$$

– Une seconde généralisation :

On cherche les solutions entières strictement positives de l'équation : $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$. Mais, comme le disait déjà Fermat à son époque, il manque ici de place pour montrer qu'il n'y a pas de telle solution ; et ce résultat n'est pas au programme de la terminale S !

Congruences dans \mathbb{Z}

L'addition, la soustraction et la multiplication sont compatibles avec les relations de congruence dans \mathbb{Z} ; ce n'est pas le cas de la division : on illustrera ce fait à l'aide de contre-exemples. Les congruences permettent en particulier de trouver facilement les restes de divisions de grands nombres entiers, comme dans les exemples suivants :

1) Pour trouver le reste de la division de 275^{275} par 7, on remarque que le reste de la division de 275 par 7 est 2 et donc que $275^{275} \equiv 2^{275} \pmod{7}$. De plus $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ et, par suite, $2^{275} \equiv 4 \pmod{7}$. Le reste est donc 4. Par une autre méthode, 271 est le plus grand entier premier inférieur à 275, dans ces conditions, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{271} \equiv 2 \pmod{7}$ et par suite $2^{275} \equiv 32 \equiv 4 \pmod{7}$.

Les congruences sont à la base de la classique « preuve par 9 ».

$10 \equiv 1 \pmod{9}$ et donc $10^n \equiv 1 \pmod{9}$.

Si un nombre s'écrit $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ en base 10, alors il est congru à :

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \pmod{9}.$$

2) 45 caméléons dans une île peuvent prendre l'une de ces trois couleurs : jaune, gris, bleu. Au départ, il y a 17 jaunes, 15 gris et 13 bleus. Lorsque deux d'entre eux sont ensemble, ils cherchent à être de la même couleur :

– ou bien ils ont déjà la même couleur : ils se regardent et voyant qu'ils ont la même couleur, ils la gardent ;

– ou bien ils ont des couleurs différentes : en tel cas, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Par exemple deux caméléons de couleur jaune et bleue deviennent gris après leur rencontre.

Est-il possible qu'après un certain nombre de rencontres, les caméléons aient la même couleur ?

Supposons qu'après k rencontres il y ait j_k, g_k et b_k caméléons de couleur respectivement jaune, grise et bleue ; alors, après la rencontre $(k + 1)$, soit rien n'a changé, soit deux des nombres ont diminué d'une unité, et le troisième a augmenté de deux unités. On remarque alors que $j_{k+1} - g_{k+1}$ vaut alors soit $j_k - g_k$, soit $j_k - g_k + 3$, soit $j_k - g_k - 3$. Ainsi, le reste de la division par 3 de $j_k - g_k$ reste invariant lorsqu'on passe de k à $k + 1$ rencontres. Mais on part de $j_0 - g_0 = 2$, d'où $j_k - g_k \equiv 2 \pmod{3}$. Cependant, si les caméléons sont de la même couleur après n rencontres alors $j_n - g_n$ vaut 0, 45 ou (-45) et est donc congru à 0 modulo 3. Les caméléons ne pourront donc jamais tous être de la même couleur.

3) Clés de contrôle.

Le calcul des clés de contrôle des numéros INSEE, de comptes bancaires ou d'ISBN fait intervenir des divisions de grands nombres, impossibles à réaliser sur des calculatrices standard ; la décomposition de ces nombres en sommes et produits de nombres plus petits et l'utilisation des congruences est alors un moyen efficace de déterminer ces clés (voir document d'accompagnement de l'option mathématique en série L).

De tout temps, des personnes ont voulu coder leurs messages pour en garantir la confidentialité. Une simple permutation de lettres constitue déjà un codage. Ce codage est très facile à « casser » si on dispose des probabilités d'apparition des lettres de l'alphabet (voir sur le cédérom).

Petit théorème de Fermat

On se limitera essentiellement, en terminale, à l'énoncé et à une ou deux démonstrations de ce théorème.

Théorème

Soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors :
 $a^{p-1} - 1$ est divisible par p .

Remarque – Il est équivalent de montrer que $a^p - a$ est divisible par p . En effet, $a^p - 1 = a(a^{p-1} - 1)$ et d'après le théorème de Gauss, le produit $a(a^{p-1} - 1)$ est divisible par p si et seulement si a ou $(a^{p-1} - 1)$ le sont.

Démonstration 1

p ne divise aucun nombre de la suite $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$. En effet, d'après le théorème de Gauss, si p divisait un de ces produits ka , p diviserait k puisque a et p sont premiers entre eux. Ceci est impossible puisque $1 < k < p$.

De plus, les restes des divisions de $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ par p sont tous différents. Si on trouvait des restes identiques pour ka et $k'a$ ($k > k'$) alors le reste de $(k - k')a$ par p serait nul, ce qui est impossible d'après ce qui précède. À l'ordre près, les restes de $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ par p sont $1, 2, 3, \dots, p-1$.

Le produit $a \times 2a \times 3a \times \dots \times (p-1)a = (p-1)!a^{p-1}$ a pour reste de la division par p le produit $1 \times 2 \times \dots \times (p-1) = (p-1)!$ Soit $(p-1)! (a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$. D'où le résultat.

Une démonstration particulièrement courte consiste à utiliser le théorème de Lagrange (l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe) et à l'appliquer au groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$; c'est en fait la même que la démonstration 1.

Démonstration 2

La formule du binôme permet d'écrire, pour tout entier b :

$$(b+1)^p = b^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} b^i,$$

où $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{1 \times 2 \times \dots \times i}$. Comme p est premier et $i < p$, aucun nombre parmi $2, 3, \dots, i$ ne divise p et $\binom{p}{i}$ est divisible par p . Par suite $(b+1)^p \equiv b^p + 1$ (modulo p).

On a alors : $a^p \equiv (a-1)^p + 1 \equiv (a-2)^p + 1 + 1 \equiv (a-3)^p + 3 \equiv \dots \equiv (a-a)^p + a$ (modulo p), soit : $a^p \equiv a$ (modulo p).

Démonstration 3

On donne ici une démonstration *combinatoire*, qui fournit au passage une interprétation du quotient $(a^p - a)/p$.

Considérons un polygone régulier (A_0, \dots, A_{p-1}) ayant p sommets et étudions les façons de le colorier avec a couleurs. Le nombre total de coloriage est a^p . Parmi ces coloriages, il en existe a qui sont unicolores. Il s'agit donc de montrer que le nombre de coloriages multicolores du polygone est multiple de p . Or, étant donné un coloriage, il est possible d'en déterminer $p-1$ autres par les rotations R_k d'angles $2k\pi/p$ ($1 \leq k \leq p-1$) : si (c_0, \dots, c_{p-1}) représente le coloriage initial, alors le coloriage final est représenté par (c'_0, \dots, c'_{p-1}) caractérisé par la condition $c'_j = c_r$, où r est le reste de $j+k$ dans la division euclidienne par p . On montre qu'on obtient, avec le coloriage initial, p coloriages distincts : en effet, si un coloriage (c_0, \dots, c_{p-1}) est invariant par une rotation R_k ($1 \leq k \leq p-1$), alors, par récurrence sur n , on doit avoir $c_0 = c_j$ lorsque j est le reste de la division euclidienne de nk par p . Comme p est premier, quand n parcourt $[0, p-1]$, on obtient, pour j , toutes les valeurs de $[0, p-1]$ (géométriquement, on parcourt les sommets du polygone en appliquant successivement une certaine rotation et en reliant les sommet successifs, on obtient un polygone convexe ou étoilé) : cela prouve que les seuls coloriages invariants par R_k sont les coloriages unicolores. Les coloriages multicolores sont au nombre de $a^p - a$ et peuvent être rassemblés par groupes de p . Donc $a^p - a$ est multiple de p . Le quotient $(a^p - a)/p$ peut s'interpréter comme le nombre de coloriages multicolores comptés à rotation près.

Nombres premiers

Les nombres premiers constituent les briques à partir desquelles est bâti l'édifice de la théorie de nombres. La démonstration de leur infinitude est une illustration ancienne et convaincante de la puissance du raisonnement mathématique, qu'il faut savoir faire partager aux élèves. Les énoncés des propriétés des nombres premiers qui sont démontrées et de celles qui sont conjecturées peuvent remplir un livre.

La documentation (y compris sous une forme accessible aux élèves) est abondante. Les parutions des années 1999 et 2000 – promue année mondiale des mathématiques – ont donné une mesure de la place de l'arithmétique au sein des mathématiques (Delahaye J.-P., *Les Merveilleux Nombres premiers*, Belin ; Stewart Ian, *L'Univers des nombres*, Belin ; Singh Simon, *Histoire des codes secrets*, J.-C. Lattès, 1999 ; etc.). Des ouvrages à visée pédagogique sont aussi disponibles (« Secret des nombres », n° hors-série 6 de la revue *Tangente*, le n° 85 de mars-avril 2002 de cette revue, ainsi les deux tomes *Arithmétique* et *TI-89/92 en terminale S*, C. Vassard et alii., CNDP, 2001, dont le contenu est aisément transposable, pour ce qui est du calcul instrumenté, à tout autre matériel que celui du titre).

On a longuement (et vainement à ce jour) cherché une formule simple permettant de dire rapidement si tel entier est premier ou non. Les algorithmes les plus simples pour tester la primalité d'un nombre entier sont :

- le crible d'Ératosthène : il a l'avantage de fournir une liste de nombres mais nécessite la mise en mémoire de ces nombres ;
- la recherche des éventuels diviseurs impairs, en s'arrêtant à \sqrt{n} : si n est le produit de deux nombres entiers, l'un est plus petit que \sqrt{n} et l'autre plus grand.

Mais ces algorithmes ne peuvent pas fonctionner pour des nombres ayant plusieurs dizaines de chiffres. La multiplication de grands nombres premiers est en pratique irréversible et les applications de cette en sont importantes (code RSA, voir sur le cédérom). Citons à ce propos M. Demazure :

« Depuis leurs origines, l'algèbre et l'arithmétique mêlent deux traditions, théorique et pratique, que l'on peut symboliser par les noms d'Eudoxe et de Diophante, bien que leurs origines soient sûrement bien antérieures. Et de toujours y a été présente de façon confuse la distinction entre calculs théoriquement possibles et calculs effectivement réalisables. Mais ce n'est que récemment, dans le double développement des théories de la complexité et des outils informatiques, que les idées se sont éclaircies, que des énoncés précis ont pu être formulés et que des applications souvent spectaculaires ont été développées.

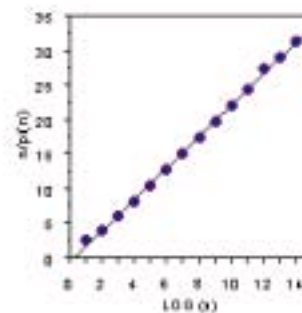
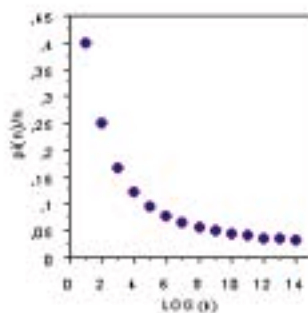
C'est ainsi par exemple que la sécurité des transactions interbancaires par voie électronique repose essentiellement aujourd'hui sur la difficulté de la décomposition des grands nombres en facteurs premiers, alors même que cette difficulté n'est à ce jour pas prouvée. Étrange revanche pour une discipline, la théorie des nombres, jusque là modèle même d'inutilité. Qu'on ne s'y méprenne pas : loin de moi l'idée qu'on pourrait "justifier" l'arithmétique par la banque (non plus que l'inverse d'ailleurs !). »

Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes, Éditions Cassini, 1997. Introduction.

Les mathématiciens continuent aussi à s'intéresser à la répartition dans \mathbb{N} des nombres premiers.

Soit $\pi(n)$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n ; le tableau ci-dessous donne quelques valeurs de $\pi(n)$, à propos desquelles divers quotients et représentations graphiques peuvent être étudiés.

$\log(\pi)$	$\pi(n)$
1	4
2	25
3	168
4	1229
5	9592
6	78498
7	664579
8	5761455
9	50847534
10	455052512
11	4118054813
12	36607912018
13	346065536839
14	3204941750802



La pente de la droite tracée sur le graphique est 2,27 et $\ln(10) \approx 2,30$. Aurait-on là la trace d'une loi de répartition des nombres premiers ?

À la fin du XVIII^e siècle, Gauss, âgé de quinze ans, aurait conjecturé que pour n grand, $\frac{\pi(n) \ln(n)}{n} \approx 1$. Un siècle plus tard, Charles de la Vallée Poussin et Jacques Hadamard ont démontré le « théorème des nombres premiers », soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(n) \ln(n)}{n} = 1.$$

Mais l'histoire de la répartition des nombres premiers n'est pas finie. Une des plus grandes conjectures des mathématiques aujourd'hui, certains disent la plus centrale, peut être énoncée sous la forme suivante :

Conjecture de Riemann : il existe une constante C telle que pour tout entier naturel $n > 2$:

$$|\pi(n) - li(n)| \leq C\sqrt{n \ln(n)} \text{ avec } li(n) = \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)}$$

Pouvoir énoncer aux élèves le théorème des nombres premiers ainsi que la conjecture de Riemann est en soi une application du logarithme et de l'intégrale introduits par ailleurs. Un tel énoncé illustre de plus le lien profond entre l'arithmétique et l'analyse.

Similitudes

Au cours des années antérieures, les élèves ont étudié les triangles semblables (définis par l'égalité des angles ou par l'existence d'un coefficient d'agrandissement-réduction). Ils ont étudié des exemples de transformations (translations, homothéties, rotations) soit en classe de première soit dans le tronc commun de terminale en liaison avec leur forme complexe. Dans ces études, les transformations agissent d'abord sur une configuration (collège, seconde), puis sur le plan entier. Les composées des transformations étudiées ne sont pas envisagées systématiquement ni *a fortiori* le groupe qu'elles constituent. L'objectif de ce chapitre de spécialité est une étude des similitudes du plan.

Pourquoi l'étude des similitudes ?

- Une telle étude permet d'abord une synthèse de tous les aspects de géométrie plane étudiés jusque là et rappelés ci-dessus.
- Elle permet ensuite de construire un ensemble théorique consistant ; les élèves de spécialité pourront ainsi être confrontés à une expérience mathématique fondamentale : celle de bâtir un « morceau » de l'édifice mathématique ; on retrouve l'un des objectifs visés par certains programmes antérieurs à travers la classification des isométries planes.
- Cette étude peut être menée à bien dans le cadre théorique et pratique dont disposent les élèves ; c'est l'une des motivations du choix de l'outil complexe pour le traitement théorique de cette étude, compte tenu du temps disponible (en terminale mais aussi en première). Les exercices s'appuieront bien sûr sur le calcul complexe ; mais, une fois les résultats théoriques acquis, on veillera à choisir des situations sollicitant l'intuition géométrique ou le raisonnement géométrique « pur » et on évitera de ramener systématiquement tout problème géométrique à un calcul algébrique sur les complexes. On trouvera plus loin des exemples d'exercices illustrant ce propos.

Quelle étude théorique ?

Le texte qui suit répond à une demande souvent formulée lors de la mise en consultation de ce programme. Il montre un cheminement possible avec les élèves.

L'objectif de la spécialité est une étude des similitudes du plan, définies par une condition de conservation : on appelle similitude du plan toute transformation du plan qui conserve les rapports de distances. C'est donc le choix d'une définition en « compréhension » ou « descriptive » : on donne la condition que doivent vérifier les similitudes et non la liste des similitudes. Sur la définition, certaines propriétés sont immédiates : la composée de deux similitudes, la réciproque d'une similitude sont encore des similitudes. On dispose d'autre part des exemples que les élèves ont rencontrés antérieurement.

Les questions suivantes sont alors naturelles : quelle est la forme générale d'une similitude plane ? Que peut-on dire de la composée de deux similitudes simples (par exemple la composée d'une homothétie et d'une rotation de centres différents) ? Quelles sont les similitudes envoyant une configuration donnée en une autre configuration ?

On précise ci-dessous les contenus et une progression possible. Le contexte est celui du plan orienté ; la donnée d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) permet d'utiliser le plan complexe \mathbb{C} .

Remarque sur le langage

Une transformation est par définition une bijection T du plan dans lui-même : cela signifie qu'à tout point M est associé un unique point noté $T(M)$, de sorte que, pour tout point N , il existe un unique point M du plan tel que $T(M) = N$. La transformation réciproque T^{-1} est définie par la condition $T^{-1}(N) = M$ si et seulement si $T(M) = N$.

Les notions générales de bijection et de bijection réciproque ne sont pas au programme. Cependant, ces termes pourront être utilisés à l'occasion de l'étude des exemples de bijections du programme : exponentielle et logarithme, puissance n et racine n -ième, transformations géométriques.

Généralités sur les similitudes du plan

Par définition une similitude (plane) est une transformation du plan (bijection du plan dans lui-même) qui conserve les rapports de distances. On démontrera que cela équivaut à l'existence d'un réel k tel que la transformation multiplie les distances par k . Ce réel k est appelé rapport de la similitude.

Par exemple, translations, homothéties, symétries axiales sont des similitudes dont on précisera le rapport ; dans le plan complexe, les transformations de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (a complexe non nul) sont des similitudes de rapport $|a|$.

De plus, la composée de deux similitudes, l'application identité, la réciproque d'une similitude sont des similitudes. Le rapport de la composée de deux similitudes est le produit des rapports des deux similitudes. La définition des similitudes met en évidence une propriété de conservation, ce qui entraîne aussitôt les propriétés liées à la composition. Il est souhaitable de faire remarquer que la composition des similitudes n'est pas commutative en donnant des exemples purement géométriques ou par calcul complexe (compositions de deux transformations $z \mapsto az + b$).

On démontrera qu'une similitude envoie tout triangle sur un triangle semblable et qu'elle conserve les angles.

Réciproquement, une transformation ayant l'une de ces deux propriétés est une similitude, mais ce résultat n'est pas au programme : le professeur conserve la liberté de le faire ou non en exercice.

Une isométrie est définie comme transformation du plan qui conserve les distances : c'est donc une similitude de rapport 1. Translations, symétries axiales, rotations sont des exemples d'isométries.

Étude des similitudes directes

Par définition, une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.

De façon plus explicite, une similitude s est directe si, pour tous points A, B, C, D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a :

$$(\overrightarrow{s(A)s(B)}; \overrightarrow{s(C)s(D)}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \text{ (angles orientés de vecteurs).}$$

Par exemple, translations, homothéties, rotations sont des similitudes directes ; dans le plan complexe, les transformations $z \mapsto az + b$ sont des similitudes directes.

La composée de deux similitudes directes et la réciproque d'une similitude directe sont des similitudes directes.

On pourra dire que deux triangles semblables sont directement semblables s'il y a égalité des angles orientés correspondants. On pourra dire qu'ils sont inversement semblables si les angles correspondants sont opposés.

Remarques – On démontrera qu'une similitude directe envoie tout triangle sur un triangle directement semblable. En exercice, on peut établir la réciproque. On peut aussi remarquer qu'une transformation du plan est une similitude directe si et seulement si elle conserve les angles orientés (car elle envoie alors tout triangle sur un triangle directement semblable) mais il n'est pas indispensable d'entrer dans ces détails.

Le programme demande d'établir la forme complexe des similitudes directes. Pour cela, un moyen efficace est d'établir la propriété suivante qui exploite les connaissances acquises sur les nombres complexes :

Si s est une similitude directe du plan complexe, si p, q, r sont les affixes de trois points distincts et si p', q', r' sont les affixes de leurs images par s , alors $(r' - p')/(q' - p') = (r - p)/(q - p)$.

On démontre cette propriété par égalité des modules et des arguments.

Forme complexe des similitudes directes

Le résultat central est le suivant. Les similitudes directes du plan complexe sont les transformations de la forme $z \mapsto az + b$, où a et b sont deux nombres complexes, a étant non nul.

En effet, soit s une similitude directe ; si z est un nombre complexe, il suffit d'appliquer la propriété précédente à $(p, q, r) = (0, 1, z)$ pour obtenir $(z' - p')/(q' - p') = (z - 0)/(1 - 0)$, et donc $z' = (q' - p')z + p'$, où p', q', z' désignent les affixes des images par s des points d'affixes $0, 1, z$. Il en résulte que s est de la forme $z \mapsto az + b$ où a est non nul.

Réciproquement, pour a non nul, $z \mapsto az + b$ définit une similitude directe.

Angle d'une similitude directe

Soit s une similitude directe. L'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{s(A)s(B)})$ ne dépend pas des points distincts A et B . On l'appelle angle de la similitude. L'angle de la composée de deux similitudes directes est égal à la somme des angles des deux similitudes.

Ces propriétés se démontrent avec la forme complexe ; on fera observer que la mesure de l'angle de la similitude est l'argument de a dans l'expression $z \mapsto az + b$.

Point fixe d'une similitude directe

Une similitude directe qui n'est pas une translation admet un unique point fixe. On dit que c'est le centre de la similitude. Cela résulte de la forme complexe des similitudes.

Remarque – Les moyens géométriques de déterminer le point fixe d'une similitude directe sont hors programme.

Description géométrique complète des similitudes directes

Soit s une similitude directe de rapport k , et d'angle θ . Deux cas sont possibles :

- s est une translation (se produit si $k = 1$ et $\theta = 0$ modulo 2π) ;
- s possède un unique point fixe Ω et est la composée (commutative) de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et de la rotation de centre Ω et d'angle θ .

Une propriété utile du centre d'une similitude directe

Soit O le centre d'une similitude directe. Soient M et N deux points quelconques du plan, M' et N' leurs images. Alors les triangles OMM' et ONN' sont directement semblables.

Similitudes directes et couples de points

Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

Pour démontrer ce résultat, on cherche a et b tels que la similitude soit donnée par $z \mapsto az + b$. Cela revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

Remarque – On peut aussi établir alors qu'étant donnés deux triangles directement semblables, il existe une unique similitude directe qui envoie le premier sur le second.

Application à l'étude des déplacements

Un déplacement est, par définition, une similitude directe de rapport 1, autrement dit une isométrie qui conserve les angles orientés.

Il résulte de l'étude générale que tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.

La construction géométrique, sans indication, du centre de la composée de deux rotations de centres distincts, ou du centre de la composée d'une rotation et d'une translation n'est pas exigible. Cependant, les élèves doivent savoir démontrer qu'un point défini par une construction géométrique donnée est le centre d'une telle composée en vérifiant que c'en est un point fixe. Par exemple, étant donné un triangle ABC , soit r (resp. r') la rotation de centre B et d'angle $2(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$ (resp. de centre C et d'angle $2(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$) ; montrer que $r \circ r'$ est la rotation de centre A et d'angle $2(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$.

Remarque – La construction géométrique du centre de la composée de deux rotations de centres distincts, ou du centre de la composée d'une rotation et d'une translation ne sont pas au programme.

Effet des similitudes directes sur certaines configurations

Comme conséquence de la détermination complète des similitudes directes, on déterminera l'image par une similitude directe d'un barycentre. On étudiera l'effet d'une similitude directe sur une droite, un segment, un cercle.

Ces propriétés seront fréquemment utilisées dans les exercices d'études de configurations ou de recherche de lieux géométriques exploitant les similitudes directes.

Remarque sur la méthode d'étude des similitudes directes

Dans un souci d'efficacité, le programme privilégie les nombres complexes pour établir les résultats sur les similitudes directes. Les éviter nécessiterait de plus longs développements, (étude préalable des déplacements, puis composition de déplacements et d'homothéties).

Cependant, la résolution d'exercices et de problèmes ne se limitera pas à du calcul dans le plan complexe : le professeur veillera à équilibrer les deux aspects en proposant aussi bien des exercices utilisant les nombres complexes que des exercices où les similitudes apparaîtront de façon purement géométrique.

Étude générale des similitudes planes

L'étude des similitudes quelconques passe par les résultats suivants.

1) Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'identité.
2) Une similitude qui admet deux points fixes distincts A et B est l'identité ou la symétrie axiale d'axe (AB).
Pour démontrer (1), on commence par remarquer que le rapport de la similitude est 1 donc que c'est une isométrie ; on observe alors que s'il existait un point M dont l'image M' était distincte de M, tout point fixe de la similitude appartiendrait à la médiatrice de [MM'], en contradiction avec le fait qu'il y a trois points fixes non alignés.

Pour établir (2), s désignant la similitude en question, on considère un point C n'appartenant pas à la droite (AB) et C' = s(C) : si C' = C, s est l'identité d'après (1) ; sinon, la droite (AB) est la médiatrice de [CC'] et on constate que la composée de s et de la symétrie axiale d'axe (AB) laisse fixe A, B, C et est donc l'identité, ce qui montre que s coïncide avec la symétrie axiale d'axe (AB).

Forme géométrique des similitudes non directes

Une similitude non directe peut s'écrire sous la forme $\sigma \circ h$, où σ est une similitude directe et h une symétrie axiale.

En effet, soient A, B deux points distincts et A', B' leurs images par la similitude indirecte s. Notons σ la similitude directe qui envoie A et B sur A' et B' et σ' la similitude réciproque de σ . Alors $\sigma' \circ s$ est une similitude qui admet A et B comme points fixes et qui n'est pas l'identité : c'est donc une symétrie axiale, ce qui entraîne le résultat voulu.

Forme complexe des similitudes quelconques

On pourra établir le théorème suivant, en utilisant le raisonnement précédent où A et B sont les points d'affixes 0 et 1 :

Théorème : Toute similitude du plan complexe est de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (a complexe non nul).

Effet des similitudes quelconques sur certaines configurations

Par composition avec une symétrie axiale (ou par représentation complexe) l'effet d'une similitude non directe sur un barycentre, une droite, un segment, un cercle se déduit de l'effet par une similitude directe.

Remarque – Cela achève les connaissances exigibles sur les similitudes quelconques. En particulier, les élèves n'ont pas à connaître leur forme réduite, à savoir : une similitude indirecte de rapport 1 (antidéplacement) est la composée commutative d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de la symétrie ; une similitude indirecte de rapport k différent de 1 est la composée commutative d'une symétrie axiale et d'une homothétie de rapport k et de centre appartenant à l'axe de la symétrie. Il est possible cependant de faire des exercices sur ce genre de thème, mais le cas des similitudes directes doit être privilégié.

La détermination de la composée de deux symétries axiales n'étant pas au programme, les exercices y ayant recours doivent être accompagnés des indications utiles.

Exemples de configurations et constructions (sans calcul complexe)

1) Rappel des résultats de seconde

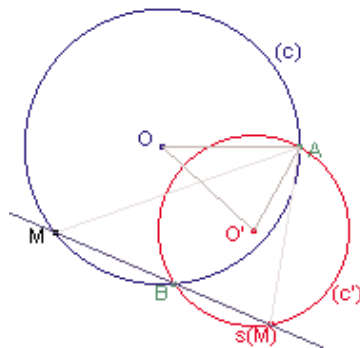
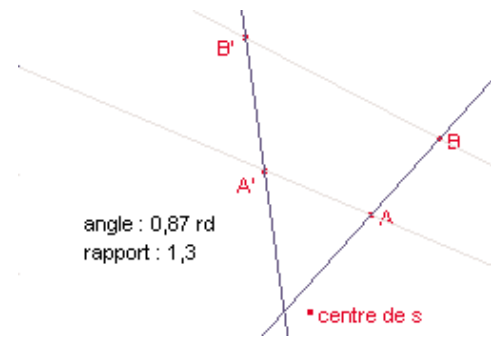


a) Soient quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Construire (à la règle et au compas) l'image d'un point C par la similitude directe (resp. indirecte) transformant (A, B) en (A', B') . Envisager tous les cas de figures.

(Travail à proposer par groupe de deux élèves.)

b) Soit s une similitude directe à centre transformant (A, B) en (A', B') (on pourra supposer les points deux à deux distincts).

Alors (AA') et (BB') sont parallèles si et seulement si (AB) et $(A'B')$ passent par le centre de la similitude.



c) (C) et (C') sont deux cercles de centres O et O' , sécants en A et B . Soit s la similitude directe de centre A telle que $s(O) = O'$.

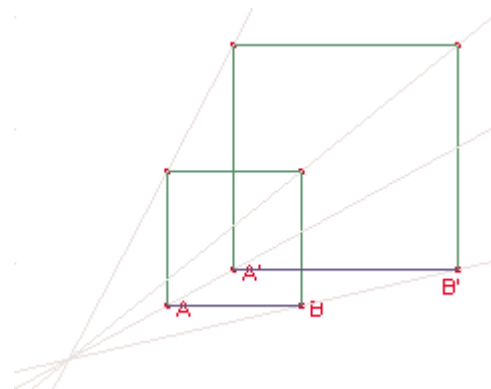
Alors pour tout point M de (C) , $s(M)$ est le point d'intersection de la droite (BM) et de (C') .

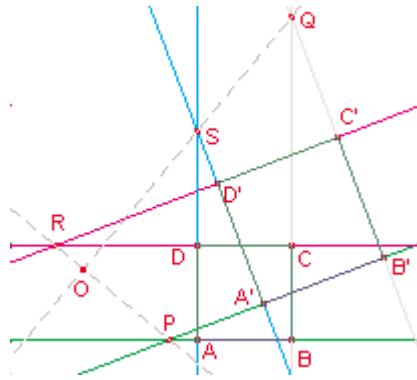
2) Détermination du centre de similitude par des carrés auxiliaires

Soient $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux carrés directs.

a) Il existe une unique similitude directe s tel que $s(A) = A'$, $s(B) = B'$, $s(C) = C'$, $s(D) = D'$.

b) On suppose (AB) et $(A'B')$ parallèles. Que dire de s ?





c) On suppose (AB) et $(A'B')$ non parallèles. Soient P, Q, R, S les points d'intersection respectifs des couples de droites (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CD) et $(C'D')$, (DA) et $(D'A')$.

Le point d'intersection de (PR) et (QS) est le centre de s .

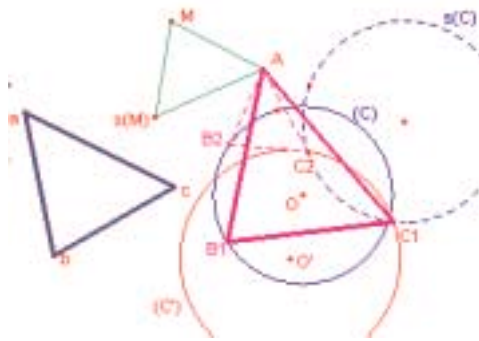
Indications :

a) L'existence et l'unicité de la similitude directe telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$ est du cours. Il suffit de vérifier qu'on a de plus $s(C) = C'$ et $s(D) = D'$: cela résulte du fait

que l'image du carré direct $ABCD$ est un carré direct $A'B'C_1D_1$, ce qui impose $C_1 = C'$ et $D_1 = D'$.

b) Lorsque (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, la similitude s est une translation ou une homothétie (similitude directe d'angle nul) selon que $AB = A'B'$ ou $AB \neq A'B'$. Dans le second cas, le centre de l'homothétie est le point d'intersection des droites (AA') et (BB') .

c) Les points P et R sont tels que $(Ps(P))$ et $(Rs(R))$ sont parallèles à $(A'B')$ et $(C'D')$. D'après l'exemple 1.b le centre O appartient donc à la droite (PR) ; il appartient de même à la droite (QS) . De plus, ces droites sont orthogonales



3) Problème de construction

Construire un triangle directement semblable à un triangle donné abc , connaissant la position de A et sachant que B et C sont situés sur deux cercles (C) et (C') donnés.

Indications : Soit s la similitude directe de centre A telle que pour tout point M distinct de A , le triangle $AMs(M)$ soit directement semblable à abc . On obtient C comme intersection de (C') et de l'image de (C) par s . Selon le cas, il existe deux solutions, une solution ou aucune solution.

4) Étude d'une configuration

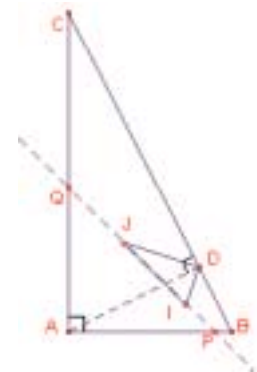
Soit ABC un triangle direct rectangle en A et soit D le pied de la hauteur issue de A . On note I et J les centres des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD . La droite (IJ) coupe AB en P et AC en Q .

a) Des triangles directement semblables : ABD, ADC, DJI .

b) Le triangle APQ est isocèle.

Indications : Les triangles DAB et DCA sont directement semblables par la similitude s de centre D , d'angle droit $(\vec{DA}, \vec{DB}) = (\vec{DC}, \vec{DA}) = \pi/2$ et de rapport $DA/DB = DC/DA$. Alors $s(I) = J$.

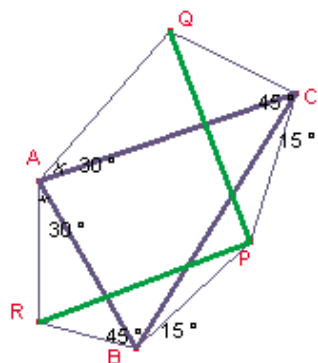
DIJ et DBA sont deux triangles directement semblables. L'angle de la similitude qui envoie le premier sur le second est égal à $\pi/4$ modulo π . C'est aussi l'angle entre (IJ) et (AB) qui vaut donc $\pi/4$ (modulo π).



5) Étude d'une configuration

(voir triangles autour d'un triangle dans le paragraphe sur la géométrie plane)

On construit extérieurement à un triangle ABC donné, les triangles PBC, QCA et RAB tels que $\widehat{PBC} = \widehat{PCB} = 15^\circ, \widehat{QCA} = \widehat{RBA} = 45^\circ, \widehat{QAC} = \widehat{RAB} = 30^\circ$. Alors $PQ = PR$ et (PQ) orthogonal à (PR) .



Indications : Considérer les similitudes directes u et v de centres respectifs B et C et telles que $u(R) = A$ et $v(A) = Q$ et étudier $v \circ u$; introduire le point T tel que le triangle BCT soit équilatéral extérieurement à ABC.

On peut aussi utiliser le calcul complexe (voir exemple 8 ci-dessous).

(En utilisant les nombres complexes)

6) Soit z un nombre complexe non nul.

Dans le plan complexe, soient A, B, C, D, E les points d'affixes z, z^2, z^3, z^4, z^5 .

a) Si A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ), alors E est aussi sur ce cercle.

b) Déterminer les nombres complexes z tels que A, B, C, D, E soient sur un même cercle.

Remarque – L'appel à l'intuition géométrique serait ici maladroit.

Solution : Soit s la similitude donnée par $u \mapsto zu$. Si A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ), alors B, C, D, E sont éléments du cercle image de (Γ) par s , nécessairement confondu avec (Γ). Pour que les cinq points soient sur un même cercle, il faut donc que $|z|$ soit égal à 1. Réciproquement, si $|z| = 1$, les points A, B, C, D, E appartiennent au cercle de centre O de rayon 1.

7) On suppose que A' et B' sont les images de A et B par une similitude directe de centre O.

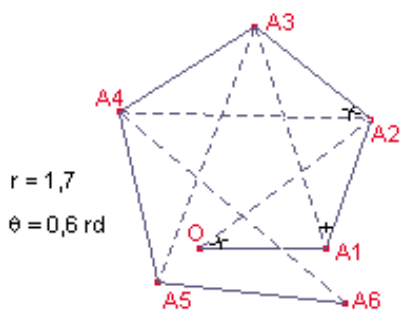
Alors B et B' sont les images de A et A' par une similitude directe de centre O.

Indication : Réponse immédiate avec les complexes. Cela se résume en l'implication : $a'l'a = b'l'b \Rightarrow (a'l'b' = alb)$.

8) Condition sur les affixes pour qu'un triangle soit équilatéral (resp. rectangle isocèle, resp. rectangle, resp. isocèle).

9) Spirale (voir la spirale proposée dans le paragraphe « Suites » du document d'accompagnement de première S)

Soit r un réel strictement positif et soit θ un réel tel que $0 < \theta < \pi/2$. Pour tout point P, on note s_p la similitude de centre P, de rapport r et d'angle θ . On définit la suite de points $A_1 = A, A_{n+2} = s_{A_n}(A_{n+1})$ et z_n désigne l'affixe de A_n .



1) Il existe une similitude directe f telle qu'on ait $f(A_n) = A_{n+1}$ pour tout entier n .

Indication : Considérer la suite $u_n = a_{n+1} - (re^{i\theta} - 1)a_n$ où a_n est l'affixe de A_n .

2) On pose $r = 1/\cos(\theta)$.

– Les points (A_n) appartiennent alors à deux droites fixes orthogonales.

– Calculer θ pour que la suite soit périodique.

– Démontrer que $A_{n+1}A_{n+2}$ est orthogonal à $A_{n+1}A_n$.

Construire A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 lorsque $a = i$ et $\theta = \pi/3$.

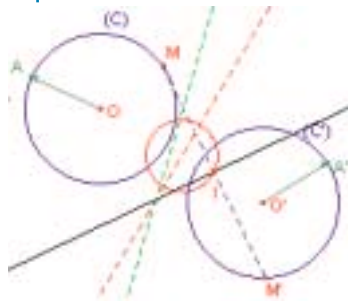
3) On pose $r = 2 \cos(\theta)$

– Alors f est une rotation.

– Déterminer θ pour que la ligne polygonale O, A_1, A_2, \dots, A_n soit fermée.

– Faire la construction lorsque $a = i$ et $\theta = \pi/6$.

Problèmes de lieux



10) Soient (C) et (C') deux cercles du plan de centres O et O' et de même rayon R . Soit A un point de (C) et A' un point de (C') tels que les vecteurs \vec{OA} et $\vec{O'A'}$ soient distincts.

À tout point M de (C) on associe le point M' de (C') tel que $(\vec{OA}; \vec{OM}) = (\vec{O'A'}; \vec{OM'})$ modulo 2π .

a) La médiatrice de $[MM']$ passe par un point fixe.

b) Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I de $[MM']$.

Solution :

a) M' est l'image de M par une certaine rotation; la médiatrice de $[MM']$ passe par le centre Ω de cette rotation.

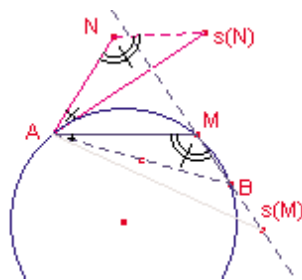
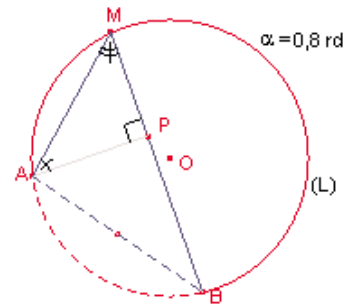
b) I est l'image de M par une certaine similitude s ; I décrit le cercle image de (C) par s .

11) Arc capable

Soient A et B deux points distincts et α un nombre réel. On veut montrer que l'ensemble L des points M tels que $(\vec{MA}; \vec{MB}) = \alpha$ (modulo π) est un cercle passant par A et B privé de A et B .

– Soit M un point de L ; soit P le projeté orthogonal de A sur la droite (BM) . Montrer que la similitude s de centre A telle que $s(P) = M$ ne dépend pas de M . En déduire que L est inclus dans (C') , image par s du cercle de diamètre $[AB]$.

– Réciproquement, montrer que tout point de (C') distinct de A et B appartient à L .
Remarque – On peut ensuite utiliser ce résultat dans d'autres exercices sous sa forme géométrique ou complexe (mais ce résultat n'est pas exigible).



12) (S'appuyant sur 11.) Soient A et B deux points distincts et s une similitude directe de centre A . Déterminer les points M du plan tels que $B, M, s(M)$ soient alignés.

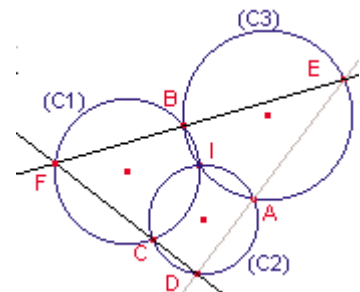
Soient s et s' deux similitudes directes. Déterminer les points du plan tels que $M, s(M), s'(M)$ soient alignés.

Indication : Il s'agit d'un cercle (ou d'une droite) à chaque fois.

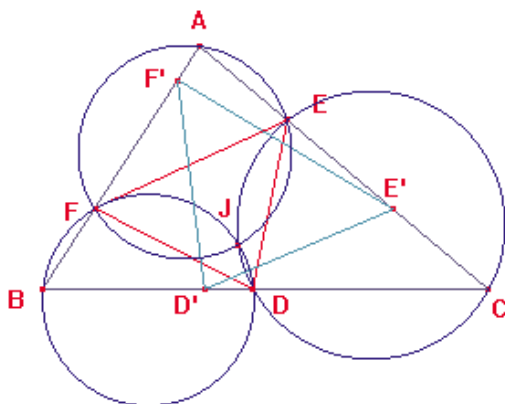
Prolongements

13) (S'appuyant sur 11.)

a) Trois cercles (C_1) , (C_2) , (C_3) ont un point commun I et se coupent en A, B, C . Une droite passant par A coupe (C_2) et (C_3) en D et E . Démontrer que (CD) et (EB) se coupent en un point F situé sur (C_1) . Démontrer que lorsque la droite passant par A varie, les triangles DEF obtenus sont deux à deux semblables.



b) Lorsqu'un triangle DEF varie en restant inscrit dans un triangle ABC donné et en restant semblable à lui-même, démontrer que le lieu des centres des similitudes obtenues est un point.



Indication : Pour a), on peut par exemple considérer les trois similitudes de centre I qui transforment respectivement (C_1) , en (C_2) , (C_2) , en (C_3) , (C_1) , en (C_3) , et on utilise le résultat de l'exemple 1.c).

Pour b), on suppose que D est (BC), E sur (AC) et F sur (AB) ; soit J est le centre de la similitude qui fait passer de DEF à un triangle semblable D'E'F' inscrit dans ABC ; on peut montrer que J appartient aux cercles DCE et de même aux cercles FBD et FEA.

Remarque – Étant donné un triangle ABC et un autre DEF inscrit dans ABC, on a ainsi un moyen de construire des triangles semblables à DEF et inscrits dans ABC.

Sections planes de surfaces

Les fonctions de deux variables sont d'un intérêt considérable dans le développement de la pensée mathématique. En effet, elles sont les seules, parmi les fonctions de n variables (avec $n \geq 2$) dont on peut voir le graphe. Elles sont une source irremplaçable d'intuitions sur ces fonctions qui, parce qu'elles comportent plus d'une variable, obligeront ultérieurement à généraliser les notions de dérivée (dérivées partielles) et de différentielle. Ce passage par les fonctions de deux variables est d'autant plus utile que dans l'enseignement supérieur, il n'est pas rare que l'on aborde sans ménagement les fonctions de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n .

Un autre intérêt de l'étude des fonctions de deux variables est de montrer par des exemples que la notion de fonction recouvre davantage que le champ – parfois un peu trop figé dans l'esprit des élèves – des fonctions réelles d'une variable réelle ; les élèves ont d'ailleurs le plus souvent oublié les fonctions de deux variables manipulées dès l'école élémentaire à travers les quatre opérations de l'arithmétique ($x + y$, $x - y$, xy et x/y).

Il s'agit de plus de faire le lien entre des questions de géométrie dans l'espace et des méthodes de nature algébrique liées à l'équation $z = f(x, y)$ et d'obtenir des résultats non triviaux à partir de remarques simples.

Toute étude générale des surfaces ou des fonctions de deux variables est hors programme. Ce chapitre de spécialité a un contenu modeste, mais son importance conceptuelle ne doit pas être sous-estimée.

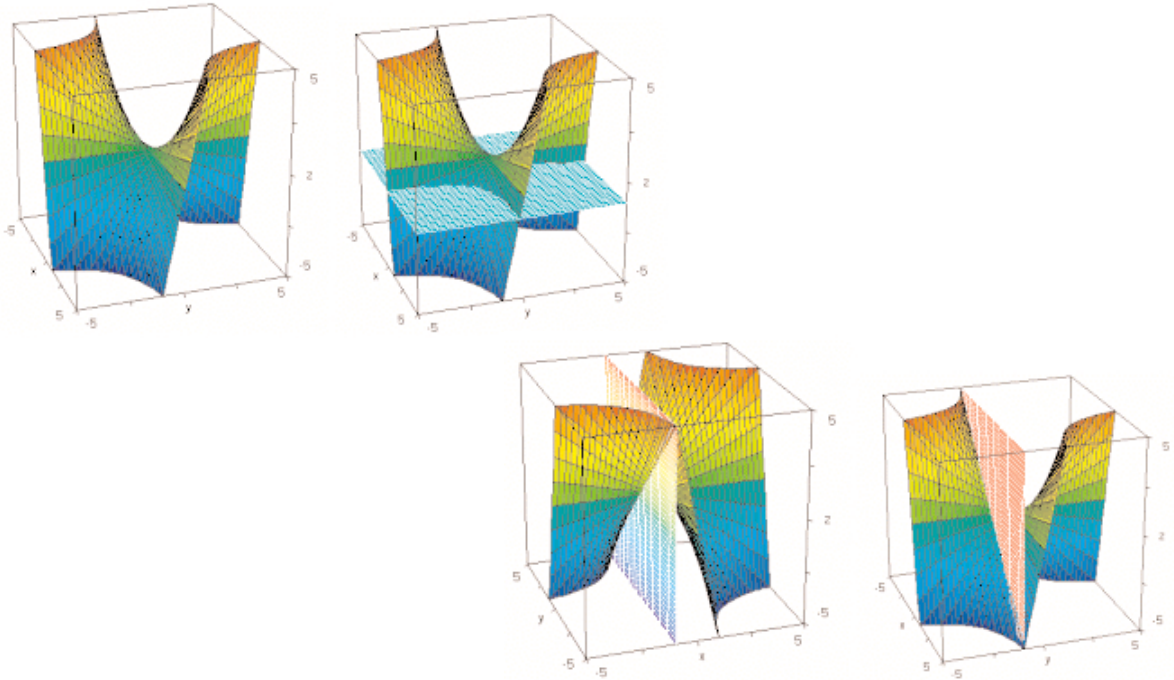
Exemples d'activités introductives

Un préalable utile pourra être de faire découvrir aux élèves la forme générale des courbes de niveau d'une surface topographique autour respectivement d'un sommet, d'un fond et d'un col. On prendra garde qu'en général, les courbes de niveau à l'altitude exacte du col (deux lignes qui se croisent) ne sont pas présentes sur les cartes. Inversement, à partir d'une carte topographique, on pourra chercher à reconstituer le profil de la ligne joignant deux points donnés.

1) On a représenté une surface dans le cube $[-5;5]^3$, puis les sections de cette surface par des plans. Déterminer, par lecture graphique, l'équation de chacun de ces plans. On sait que cette surface a pour équation l'une des équations suivantes :

$$x^2 + y^2 = z ; xy = z^2 ; xy = z.$$

Quelle est la bonne équation ? Quelle est, dans chacun de ces plans, l'allure de la courbe de niveau ? En donner une équation dans un repère du plan que l'on précisera.



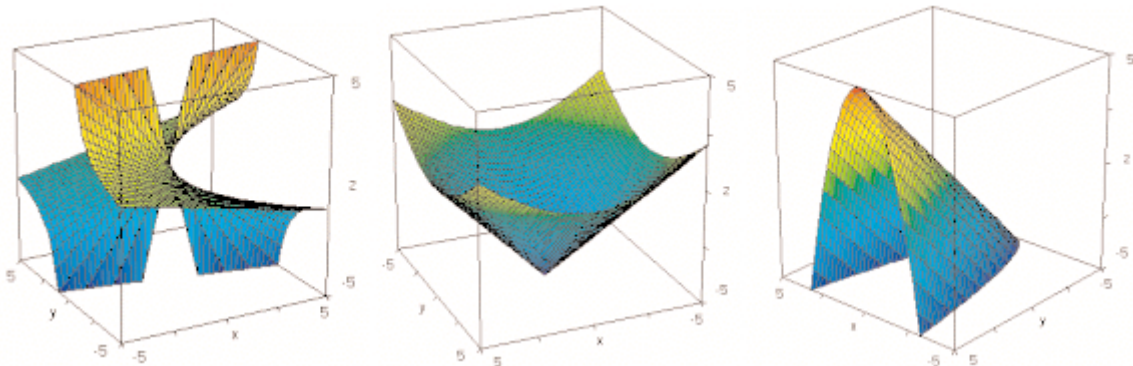
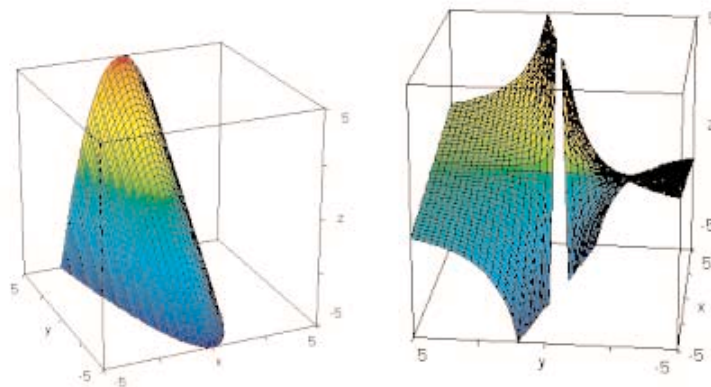
2) On a donné ci-dessous cinq représentations (dans le cube $[-5;5]^3$) de trois surfaces dont les équations sont données ci-dessous. Associer à chaque représentation son équation.

Équations :

(1) $z = \frac{x}{y}$

(2) $z = y - x^2$

(3) $x^2 + y^2 = (z + 5)^2$



Le travail consistera donc le plus souvent à partir d'une surface d'équation $z = f(x,y)$ et à étudier les sections par des plans parallèles aux plans de coordonnées. L'intersection avec un plan $z = k$ fournit dans l'espace une courbe Γ_k définie par le système d'équations $f(x,y) = k, z = k$. On représentera dans le plan Oxy les courbes Γ_k' définies par $f(x,y) = k$. On distinguera clairement les courbes Γ_k (dans l'espace) des courbes Γ_k' qui en sont les projetées orthogonales sur le plan Oxy . Un travail analogue sera fait avec les sections par des plans $x = k$ ou des plans $y = k$. Pour ces derniers plans, on remarquera que ces sections sont des graphes de fonctions d'une variable et les élèves traiteront des exemples tels $f(x,y) = xy$ ou $f(x,y) = x^2 + y^2$. On pourra éventuellement étudier les familles de courbes associées.

Concernant les cylindres $x^2 + y^2 = r^2$ et les cônes $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$, il s'agit de prolonger le travail commencé en première. Les élèves doivent savoir le lien entre leur équation et leur nature géométrique. Ils justifieront sur leur équation que ce sont des réunions de droites. La notion générale d'hyperbole étant hors programme, on ne déterminera pas la nature géométrique de l'intersection du cône $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$ avec un plan $y = k$ (ou $x = k$) : on se contentera de la considérer comme réunion des graphes de $z = m\sqrt{x^2 + k^2}$ et $z = -m\sqrt{x^2 + k^2}$ et de la représenter.

Pour le paraboloides d'équation $z = x^2 + y^2$, on pourra préciser la nature géométrique de l'intersection avec des plans parallèles aux plans de coordonnées ; on fera remarquer la position de la surface par rapport au plan Oxy . À l'aide d'outils logiciels, on donnera une représentation en perspective de la surface et des sections étudiées.

Pour l'hyperboloides $z = xy$, le même travail sera fait ; on fera remarquer que cette surface est réunion de droites ; on insistera également sur la position de cette surface par rapport au plan Oxy .

3) Paraboloides hyperboliques

– Un exercice préparatoire : deux équations pour l'hyperbole équilatère.

a) Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. Domaine, limites, asymptotes, et tracer son graphe.

b) Tracer le lieu H des points (x,y) tels que $y^2 - x^2 = 1$.

– Surface d'équation $z = x^2 - y^2$.

a) Tracer l'intersection de cette surface par le plan horizontal $z = a$, pour $a = 0, a = 1, a = -1$.

b) Quelle est l'intersection de la surface avec le plan vertical $y = a$?

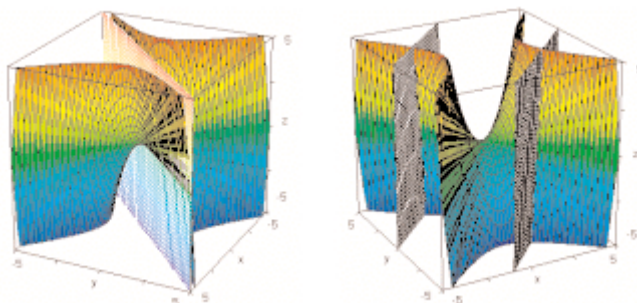
Étudier succinctement la courbe obtenue, et donner la hauteur du minimum .

Quel est le maximum de m_a , pour a variant dans \mathbb{R} ?

Faire la même étude, *mutatis mutandis*, pour le plan $x = a$.

c) Cette surface contient-elle des droites ?

d) Étudier l'intersection de la surface avec le plan $x - y = a$ puis avec le plan $x + y = a$, et revenir sur la question 3.



Section par les plans suivants :

$$x - y = 0$$

$$x - y = -5$$

$$x - y = 4$$

4) On considère le lieu des points (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

– Étudier l'intersection de cette surface par les plans horizontaux. Quels sont les points de la surface les plus proches de l'axe Oz ?

- Étudier l'intersection de cette surface avec le plan $x = z$, et montrer qu'elle est constituée de deux droites parallèles. En considérant de même le plan $x = -z$, montrer que, par tout point de la surface, passent deux droites contenues dans la surface.

Un autre type d'exercice consiste en l'étude d'une surface donnée par une équation $z = f(x,y)$ plus générale que les précédentes. Le schéma d'un tel exercice peut être le suivant : étude des sections par des plans $y = k$; représentation graphique de ces sections ; pour k donné, étude des extremums de la fonction $x \rightarrow f(x,k)$; dans le cas où on trouve un unique extremum en $x = g(k)$, on peut représenter la courbe du plan Oxy donnée par les points $(g(k),k)$; on utilisera un logiciel pour visualiser la surface et interpréter les calculs. Il n'est pas question de multiplier des problèmes de ce genre, mais simplement de montrer sur un ou deux exemples bien choisis comment il est possible d'exploiter les fonctions d'une variable pour l'étude de questions portant sur des fonctions de deux variables.

Pour les élèves, une des difficultés principales sera de maîtriser des études de fonctions avec des paramètres. C'est pourquoi on se limitera à des exemples simples.

On devrait par ailleurs tirer de chaque équation ce que des considérations élémentaires permettent d'obtenir, par exemple :

- si l'équation ne fait intervenir que x^2 , et non x , alors la surface obtenue est symétrique par rapport au plan $x = 0$;
- la quantité $x^2 + y^2$ étant le carré de la distance du point considéré à l'axe Oz , si, dans l'équation de la surface, x et y n'interviennent qu'à travers $x^2 + y^2$ alors l'équation de la surface ne dépend que de z et de la distance à l'axe Oz : elle est donc de révolution par rapport à cet axe.

Ce document est le fruit d'un travail commun entre les groupes d'experts sur les programmes scolaires de sciences physiques, mathématiques et sciences de la vie et de la Terre

Parmi les quatre interactions fondamentales qui structurent le monde naturel, gravitation, interaction électromagnétique, interaction forte et interaction faible, trois sont à l'œuvre dans le noyau de l'atome, les deux dernières l'étant de façon spécifique. Curieusement, la première information en est venue, il y a un siècle, non à partir des noyaux les plus stables qu'elles sont susceptibles d'édifier, mais au contraire des noyaux à la limite de stabilité, les noyaux dits radioactifs. De l'origine de l'énergie solaire au maintien d'une Terre chaude et dynamiquement active, de l'origine des éléments chimiques à celle des rayons cosmiques, de la fabrication d'armes terrifiantes à la production d'énergie, de la gestion des déchets nucléaires à l'imagerie médicale ou la médecine curative, les phénomènes nucléaires ont modifié notre vision du monde et pénétré nombre d'activités humaines. Il est important que les élèves de lycée en aient une première perception, en ce qui concerne tant le phénomène physique que ses applications technologiques et géologiques.

Le présent document propose une convergence thématique sur la radioactivité, entre la physique, les mathématiques et les sciences de la Terre. À un premier niveau, la fonction exponentielle, que les élèves découvrent en terminale, s'enrichit à l'évidence d'apparaître dans une expression qui permet d'obtenir l'âge des roches les plus anciennes de la Terre et d'autres planètes du système solaire. De plus, en cours de physique de terminale S, on mesure en diverses occasions des grandeurs physiques dont le taux de variation est proportionnel à la grandeur elle-même : décroissance radioactive, charge et décharge d'un condensateur, effet d'une bobine à induction dans un circuit à courant variable, chute d'un mobile en présence de forces de frottements etc. Il est intéressant que les élèves associent directement cette propriété à la fonction exponentielle.

Ceci suggère d'introduire la fonction exponentielle à partir de l'équation différentielle $y' = y$. La progression dans le programme de mathématique s'en trouve modifiée, par rapport à la façon de faire traditionnelle où l'exponentielle est introduite comme fonction réciproque du logarithme ou à partir de l'extension des fonctions puissances. La notion d'équation différentielle, c'est-à-dire d'une équation où *l'inconnue est une fonction* est nouvelle pour les élèves et sera introduite tôt dans l'année. Cette introduction est justifiée par l'exemple de la loi macroscopique de la désintégration radioactive à la fois simple et riche dans ses applications. C'est ce que propose le nouveau programme de mathématiques et que développe le présent document. Du point de vue strictement mathématique, les diverses façons d'introduire la fonction exponentielle sont équivalentes. Elles ne le sont pas du point de vue de la physique et de l'intuition.

Le thème « Radioactivité » conduit naturellement à aborder en mathématiques la notion de loi de probabilité à densité continue. La physique aborde la question sous l'angle macroscopique (et empirique) du nombre moyen de noyaux radioactifs se désintégrant dans l'unité de temps. Mais la mise en place du modèle qui, partant des hypothèses de base concernant la désintégration d'un noyau individuel, permet d'établir la loi de probabilité de la durée de vie d'un noyau radioactif est effectuée dans le programme de mathématiques. À l'issue du parcours, on peut voir comment un processus fondamentalement aléatoire peut conduire à un comportement macroscopique déterministe.

Si les découpages disciplinaires ont certes leur fonction (après tout, ils correspondent pour une part à la structuration de la nature et à notre façon de l'appréhender), l'exemple de la radioactivité illustre en quoi une recomposition des connaissances relatives à des champs disciplinaires différents accroît les possibilités de compréhension. L'interdisciplinarité est une pratique nécessitant un approfondissement de chacune des composantes, le plus souvent préalable ; il se trouve que le thème *radioactivité* est l'un de ceux où un travail peut être fait en attaquant le problème de tous les côtés à la fois, sans l'écueil de la superficialité.

La loi macroscopique de désintégration radioactive

Pourquoi certains noyaux sont-ils instables ?

La structure des noyaux atomiques (A nucléons dont Z protons et $N = A - Z$ neutrons) résulte de la compétition entre les deux interactions existant entre les constituants :

1) L'interaction forte, attractive, entre nucléons, qu'ils soient neutrons ou protons ; elle est intense, mais de courte portée : éloignés de plus de 3 ou 4 femtomètres (fm, $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$), deux nucléons ne se « voient » plus par interaction forte. Cette interaction, pour des raisons que l'on n'explicitera pas ici, privilégie les noyaux avec un nombre égal de protons et de neutrons (un signe de cette caractéristique peut être décelé dans le fait que le noyau de deutérium, isotope lourd de l'hydrogène (un proton + un neutron) est stable, alors que le « di-neutron » et le « di-proton » n'existent pas).

2) L'interaction électrique (dite « coulombienne ») entre charges électriques de même nature, en l'occurrence les protons. Aux distances en jeu dans le noyau, elle est environ dix fois moins intense que l'interaction forte, mais elle est de longue portée : chaque proton interagit avec tous les autres. Sa contribution à l'énergie totale du noyau est proportionnelle au nombre de couples de protons, soit $Z(Z - 1)/2$. Comme Z est de l'ordre de $A/2$, le nombre de couples est de l'ordre A^2 . Le potentiel coulombien entre deux charges variant comme l'inverse de leur distance, la contribution à l'énergie est ramenée en fait à une dépendance en $A^{5/3}$.

Il résulte de ces caractéristiques que l'interaction forte *attractive* contribue à l'énergie du noyau par un terme proportionnel au nombre total A de nucléons (chaque nucléon n'interagissant qu'avec ses proches voisins), alors que l'interaction coulombienne *répulsive* contribue par un terme proportionnel à $A^{5/3}$: l'interaction coulombienne, bien que moins intense que l'autre, finit par l'emporter lorsque A augmente. Au-delà d'un certain nombre de protons, les noyaux deviennent instables, et le tableau de Mendeleiev s'arrête. Les valeurs numériques particulières des constantes caractéristiques des interactions expliquent que ce nombre maximum est 92, et qu'ainsi le tableau périodique de Mendeleiev s'arrête, pour les éléments naturels, à l'uranium.

Remarques

1) L'énergie d'un noyau comprend d'autres contributions. Par exemple un terme de surface, lié à ce que le nombre de voisins est plus petit en surface qu'en volume, un terme lié à ce que le nombre de neutrons N n'est pas strictement égale à Z , etc. L'argument ci-dessus concerne les deux contributions principales et répond donc qualitativement à la question posée.

2) Un neutron isolé est une particule instable. Sa liaison dans un édifice nucléaire empêche sa désintégration.

3) On sait synthétiser en laboratoire des éléments dits « super lourds » ; le record actuel est $Z = 112$. Ces éléments ont des durées de vie trop faibles pour être observées ; leur formation est attestée par l'identification des produits de leur désintégration.

4) Les étoiles à neutrons, résidus d'explosions de supernovae, semblent contredire le raisonnement présenté ci-dessus, puisqu'il s'agit de boules de matière nucléaire d'environ 10 km de rayon, ayant en gros la masse du Soleil. Plusieurs considérations sont à prendre ici en compte : d'une part, une étoile à neutrons, contrairement à un noyau atomique, est électriquement neutre ; d'autre part, à l'échelle d'une étoile, la gravitation, loin d'être négligeable comme dans un noyau, devient l'interaction dominante. Elle est également de longue portée, et toujours attractive : c'est elle qui fait qu'une étoile à neutrons forme un système « lié » (stable).

Il est commode de représenter les noyaux atomiques dans le plan (N, Z) .

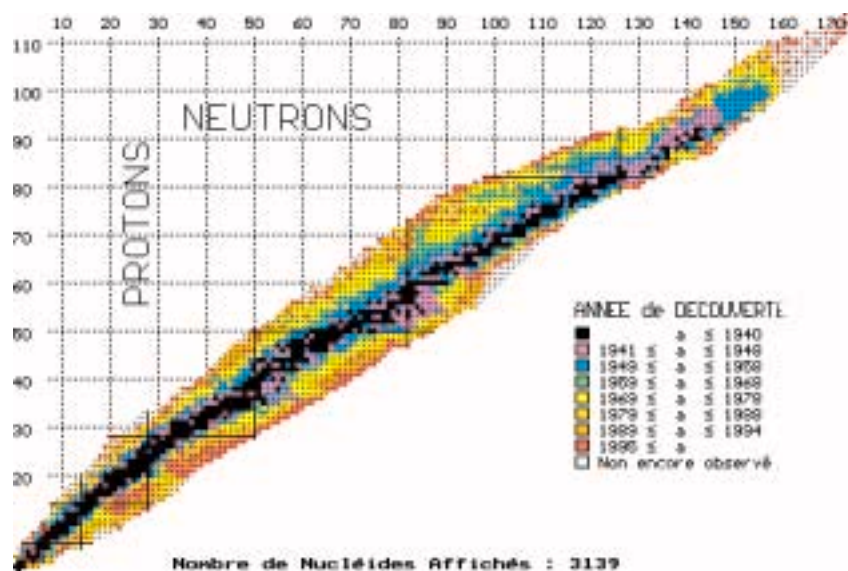


Figure 1

Un noyau est représenté par un point de coordonnées entières. Les noyaux légers sont groupés autour de la droite $N = Z$, c'est un effet mentionné de l'interaction forte. Les quelques caractéristiques développées ci-dessus permettent de comprendre où se trouvent les noyaux radioactifs dans ce plan : puisque l'interaction nucléaire privilégie les noyaux avec $N \cong Z$, les noyaux avec « trop » de protons ou « trop » de neutrons sont instables. Avec trop de protons, ils peuvent être émetteurs β^+ (un proton se transforme spontanément en neutron dans le noyau avec émission d'un positron) ou capturer un électron du cortège; avec trop de neutrons, ils sont émetteurs β^- (un neutron se transforme spontanément en proton dans le noyau avec émission d'un électron). Ces deux processus sont gouvernés par l'interaction faible. Enfin ceux qui sont « trop » lourds, vers la fin du tableau de Mendeleiev, sont émetteurs α : ils se transforment spontanément en noyaux plus légers en émettant un noyau d'hélium. La radioactivité γ est une émission de rayonnement électromagnétique, provenant de la désexcitation de noyaux qui ne sont en général pas produits dans leur état d'énergie fondamentale.

La loi de désintégration radioactive

L'expérience suggère que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 6×10^{23}), le nombre *moyen* de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t , rapporté au nombre total de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t et au temps d'observation Δt , est une constante λ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \Delta t$$

A priori, la constante λ pourrait dépendre du temps. Ce serait le cas si un processus de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée. Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de « mort sans vieillissement ».

En passant à la limite pour un intervalle de temps devenant arbitrairement petit, on écrira l'équation ci-dessus $dN(t)/N(t) = -\lambda dt$, ou encore $dN(t) = -\lambda N(t) dt$. On écrira aussi : $N'(t) = -\lambda N(t)$.

Les activités expérimentales proposées dans le programme (mesure de la radioactivité du radon, observation de la décroissance temporelle) sont décrites dans la partie du document d'accompagnement propre à la physique.

Dans ce texte, l'accent est mis sur la synergie nécessaire entre physique et mathématiques pour une bonne compréhension du phénomène, en particulier concernant les deux aspects suivants : (i) l'étude empirique de la désintégration radioactive conduit

à considérer un objet mathématique nouveau pour les élèves, appelé équation différentielle et (ii) on établit un modèle physique microscopique de la désintégration, qui rend compte de la loi macroscopique observée pour l'évolution de la valeur moyenne du nombre de noyaux existant à un instant donné.

Fonctions vérifiant $f' = kf$

L'équation $f' = kf$ est une équation où l'inconnue est une fonction : c'est un objet nouveau pour l'élève de terminale. La ou les solutions, si elles existent, sont des fonctions. Il faut remarquer ici que le seul fait de poser une équation n'implique pas qu'elle ait des solutions. Par exemple, les élèves peuvent facilement vérifier qu'aucune fonction polynôme, et plus généralement aucune des fonctions connues à leur entrée en terminale n'est solution de l'équation. On peut donc s'interroger sur l'*existence* et l'*unicité* de la solution qui prend une valeur donnée en un point donné.

Une première approche peut consister à mettre en œuvre une méthode numérique pour approcher une solution de l'équation, en s'assurant empiriquement de la convergence de la méthode. Dans le cas présent, les équations différentielles sont implicitement abordées dans le programme de mathématiques de première S : on construit à l'aide de la méthode d'Euler une approximation d'une fonction f telle que $f' = g$, où g est une fonction donnée, par exemple $g(t) = 1/(1 + t^2)$ (aucune question théorique n'est soulevée à ce niveau).

En continuité avec le travail fait en première, on peut utiliser la méthode d'Euler pour avoir l'allure du graphe sur l'intervalle $[0, t]$ de la fonction dérivable φ vérifiant $\varphi' = \varphi$, $\varphi(0) = 1$. Pour cela, on discrétise l'intervalle $[0, t]$ en n intervalles d'amplitude t/n , et on trace entre 0 et t le graphe d'une fonction affine par morceaux, obtenu en reliant par des segments les points $(kt/n, y_k)$, $k = 0, \dots, n$, avec :

$$y_0 = 1 \text{ et } y_{k+1} = y_k \left(1 + \frac{t}{n} \right)$$

soit :

$$y_k = \left(1 + \frac{t}{n} \right)^k, k = 0, \dots, n \text{ en particulier } y_n = \left(1 + \frac{t}{n} \right)^n$$

On trouvera sur le cédérom joint une applique java sur la méthode d'Euler.

Du point de vue mathématique, la méthode d'Euler lie donc la valeur de $\varphi(t)$ à celle de la limite éventuelle de la suite de terme général $(1 + t/n)^n$: cette question est traitée dans l'annexe 1, où l'on déduit, de façon rigoureuse, quelques propriétés de φ . On passe ensuite à l'étude des équations $f' = kf$; on caractérise les solutions de ces équations ayant pour valeur 1 en 0. Ce sont les fonctions dérivables transformant les sommes en produits. Diverses propositions sont établies, dont les démonstrations sont l'occasion d'approfondir la notion de dérivée, de manipuler cette nouvelle fonction φ et de justifier la notation $\varphi(t) = e^t$.

Il est important de noter à ce sujet que la seule résolution numérique ne permettrait en aucun cas d'établir ces propriétés !

Loi microscopique de désintégration radioactive

Ce paragraphe utilise des résultats du cours de mathématiques de terminale : propriétés de la fonction exponentielle, de l'intégrale d'une fonction continue et de la loi binomiale. En physique, l'expérience a permis de poser l'équation suivante :

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

Où $N(t)$ représente la *moyenne* du nombre de noyaux présents à l'instant t . On en déduit la loi d'évolution :

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}.$$

On remarquera que pour toute valeur de t et t_0 , on a aussi :

$$N(t + t_0) = N(t_0) e^{-\lambda t}.$$

Autrement dit, l'origine des temps importe peu dans l'étude de ce phénomène : on peut « repartir de 0 » quand on veut, l'équation modélisant l'évolution du nombre moyen d'atomes est toujours la même.

Considérons maintenant ce qui se passe à l'échelle des noyaux et cherchons à établir un modèle microscopique de la désintégration. L'observation montre que le nombre de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps t est une quantité aléatoire et on fera donc l'hypothèse que la durée de vie d'un noyau d'une substance radioactive donnée est elle aussi une quantité aléatoire.

Le taux de désintégration $N'(t)$ est proportionnel au nombre de noyaux présents : une interprétation est que les désintégrations des noyaux sont indépendantes les unes des autres.

Le taux de désintégration des noyaux, rapporté au nombre de noyaux présents, soit $N'(t)/N(t)$, est constant au cours du temps. Les noyaux, en quelque sorte, ne « s'usent » pas, ne « vieillissent » pas : leurs propriétés demeurent constantes au cours du temps. On peut alors, pour une substance radioactive donnée, proposer un modèle microscopique de désintégration des noyaux fondé sur les hypothèses suivantes :

- 1) La durée de vie d'un noyau est modélisée par une loi de probabilité, la même pour tous les noyaux d'une même substance radioactive.
- 2) La désintégration d'un noyau n'affecte pas la désintégration d'un autre noyau.
- 3) Un noyau se désintègre sans avoir « vieilli ».

La durée de vie est une quantité aléatoire, qui peut-être modélisée par une loi de probabilité sur l'ensemble des nombres réels positifs. Les élèves ont vu en première la notion de loi de probabilité sur un ensemble *fini*, loi caractérisée par la probabilité de chaque élément ; la généralisation de cette notion de loi de probabilité à des intervalles de \mathbb{R} , bornés ou non, est délicate. On trouvera dans le document d'accompagnement de mathématiques une approche pour la classe terminale S de la notion de loi de probabilité à densité continue. Nous cherchons dans ce paragraphe une telle loi P pour modéliser la durée de vie des noyaux d'une même substance radioactive.

On notera $F(t)$ la probabilité pour que la durée de vie d'un noyau soit comprise entre 0 et t , soit $F(t) = P([0, t])$. La loi de probabilité P étant à densité continue, on peut écrire :

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1,$$

où f est une fonction continue positive sur \mathbb{R}^+ , appelée densité de P . Pour tout intervalle $I = (a, b)$, $a < b$, que les bornes a et b soient incluses ou non dans I , on a $P(I) = F(b) - F(a)$. On remarque que $F(t)$ désigne aussi la probabilité pour qu'un noyau se désintègre entre les instants 0 et t . La probabilité qu'il ne soit pas désintégré à l'instant t est donc $1 - F(t)$. L'hypothèse (3) sera interprétée à partir de la considération suivante du non vieillissement pour un organisme : ne pas vieillir, c'est avoir à tout âge la même probabilité de vivre encore s années. Soit :

La probabilité qu'a un noyau non désintégré à l'instant t de se désintégrer dans les s unités de temps suivantes ne dépend que de s ; en particulier, comme cette probabilité ne dépend pas de t , elle est égale à la probabilité de se désintégrer entre les instants 0 et s . Soit encore :

La probabilité pour un noyau de se désintégrer entre les instants t et $t + s$, sachant qu'il n'est pas désintégré à l'instant t , est égale pour tout t à la probabilité de se désintégrer entre les instants 0 et s .

Cela s'écrit :

$$P_{I_t}([t, t + s]) = F(s),$$

où I_t est l'événement « le noyau n'est pas désintégré à l'instant t ». La probabilité de I_t est, comme indiqué ci-dessus, $1 - F(t)$; or :

$$P([t, t + s]) = (1 - F(t)) \times P_{I_t}([t, t + s]),$$

(la probabilité de se désintégrer entre t et $t + s$ est égale à la probabilité de *ne pas* se désintégrer entre 0 et t multipliée par la probabilité *conditionnelle* de se désintégrer entre t et $t + s$ sachant que le noyau existe encore à l'instant t).

Comme $P([t, t + s]) = F(t + s) - F(t)$, il s'ensuit que :

$$F(t + s) - F(t) = F(s)(1 - F(t)).$$

En posant $G(t) = 1 - F(t)$, il vient :

$$G(t + s) = G(t)G(s).$$

La fonction G est dérivable, elle transforme une somme en produit et vérifie $G(0) = 1$. D'après les résultats de l'annexe (propriété 3), c'est une fonction expo-

entielle : $G(t) = e^{at}$. Comme F est positive et bornée par 1, G est bornée par 1, et on peut écrire $a = -\alpha$, où α est strictement positif. D'où $G(t) = e^{-\alpha t}$ et $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$. La densité f est la dérivée de F ; la densité de la loi de probabilité modélisant la durée de vie d'un noyau qui *meurt sans vieillir* (on peut dire aussi qui *ne s'use pas*) est donc donnée par $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, où α est un paramètre strictement positif. On dit que P est une loi de probabilité exponentielle.

Remarques

1) La probabilité qu'a un noyau existant à l'origine de se désintégrer entre t et $t + s$ est donnée par :

$$P([t, t + s]) = e^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha s}) = e^{-\alpha t}P([0, s]).$$

Cette probabilité dépend de t et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini : c'est normal, car la probabilité de se désintégrer entre 0 et t tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini.

En particulier, $P([n, n + 1]) = (1 - p)^n p$, où p est la probabilité de désintégration en une unité de temps, soit $p = 1 - e^{-\alpha}$.

2) Un exemple d'absence d'usure dans le cas discret :

On lance un dé toutes les secondes : par analogie avec le cas de la radioactivité, on dira que s'il tombe sur 6, il se désintègre, et l'on arrête. L'absence d'usure (ou le non-vieillessement) est ici très intuitive: sachant que le dé n'est pas désintégré à la seconde n , la probabilité qu'il se désintègre à la seconde $n + 1$ vaut toujours $p = 1/6$; la probabilité qu'il se désintègre à la seconde $n + 1$ est $P(n + 1) = (1 - p)^n p$. La loi de probabilité définie sur \mathbb{N}^* par $P(n) = (1 - p)^{n-1} p$ est appelée loi de probabilité géométrique.

3) L'espérance (moyenne théorique) d'une loi de probabilité (p_1, \dots, p_N) sur $E = \{e_1, \dots, e_N\}$ est $\mu = \sum p_i e_i$.

On définit de même, si elle existe, l'espérance ou moyenne théorique μ d'une loi de probabilité sur \mathbb{R}^+ de densité f , par : $\mu = \int_0^{+\infty} t f(t) dt$. Pour $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, une intégration par parties montre que $\mu = 1/\alpha$; on peut écrire $f(t) = (1/\mu) e^{-t/\mu}$. Autrement dit, si on mesure les durées de vie d'un grand nombre de noyaux, la moyenne de ces durées sera voisine de $1/\alpha$.

La médiane τ de la loi de probabilité P , appelée ici temps de demi-vie, est égale à $\mu \ln(2)$.

Du microscopique au macroscopique

La loi de probabilité du nombre de noyaux qui se désintègrent entre les instants 0 et t , t fixé, est une loi binomiale $B(n, p)$ avec $n = N(0)$ et $p = F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$. L'espérance (moyenne théorique) de cette loi est donnée par le produit np , soit ici $nF(t) = N(0)(1 - e^{-\alpha t})$; cette espérance peut aussi s'écrire $N(0) - N(t)$, où $N(t)$ est l'espérance du nombre de noyaux à l'instant t . On a donc :

$$N(0) - N(t) = N(0) (1 - e^{-\alpha t}).$$

D'où :

$$N(t) = N(0) e^{-\alpha t}$$

On en déduit que :

$$\alpha = \lambda,$$

où λ est la constante apparaissant dans la loi empirique de désintégration.

Remarques

1) L'échelle microscopique est ici celle des noyaux ; l'échelle macroscopique est, à un instant t fixé, celle du nombre $N(t)$ de noyaux non désintégrés de la substance radioactive considérée ($N(t)$ est de l'ordre de 10^{23}).

On peut aussi dire qu'à l'échelle macroscopique les hypothèses du paragraphe précédent permettent d'appliquer la loi des grands nombres :

La proportion $X(t)/N(0)$ du nombre exact de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps t est proche de la probabilité $F(t)$ de désintégration d'un noyau entre les instants 0 et t . Soit :

$$\frac{X(t)}{N(0)} \approx F(t), \text{ où } F(t) = (1 - e^{-\lambda t}).$$

On peut quantifier ceci, en approchant la loi binomiale par une loi normale ; ainsi, si $N(0) = 10^{23}$ et $F(t) = 10^{-3}$:

$$\text{Probabilité} \left(\left| 1 - \frac{1}{F(t)} \frac{X(t)}{N(0)} \right| > 10^{-9} \right) < 10^{-15} !$$

Les fluctuations de $X(t)$ sont négligeables par rapport à son espérance, *i.e.* devant $N(0)F(t)$ (dans la mesure où $N(0)F(t)$ est suffisamment grand, soit λt pas trop petit, pour que cette phrase ait un sens). La désintégration des noyaux est un phénomène aléatoire, mais au niveau macroscopique, on peut dans ce cas négliger les variations ; ainsi, le même phénomène (la désintégration des noyaux), suivant l'échelle où on l'observe, fait l'objet d'un modèle probabiliste (échelle microscopique) ou déterministe (échelle macroscopique) où on ne raisonne plus que sur des espérances (moyennes théoriques).

2) Il est normal que la traduction au niveau microscopique de l'absence d'usure observée au niveau macroscopique permette de retrouver l'équation $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, mais encore fallait-il le vérifier. Du point de vue épistémologique, le cheminement est semblable à celui qui va des équations de la mécanique à l'établissement des lois que Kepler a établies empiriquement sur la base des observations de Tycho Brahé. Mais il est légitime de vouloir aller plus loin, et de chercher à comprendre pourquoi « les noyaux meurent sans vieillir », autrement dit, de chercher pourquoi leur désintégration ne résulte pas d'un processus de vieillissement. C'est Gamow qui le premier, en 1928, a utilisé la toute nouvelle mécanique quantique pour comprendre l'émission α : il s'agit d'une traversée de barrière d'énergie potentielle (d'origine coulombienne) par « effet tunnel ». La mécanique quantique, théorie irréductiblement probabiliste, conduit à la fois à la loi exponentielle et à la détermination de la valeur de la constante λ , à partir des caractéristiques de la barrière de potentiel. Elle permet de comprendre également la variété des valeurs de λ , d'un nucléide à un autre : en effet, la transmission à travers une barrière par effet tunnel est très sensible (exponentiellement sensible, en réalité) à des petites différences dans l'allure de cette barrière.

Datations

Les demi-vies des noyaux radioactifs couvrent une gamme étonnamment large de valeurs, comme le montrent les quelques cas suivants :

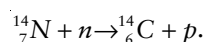
Uranium-238	$4,5 \times 10^9$ ans
Plutonium-239	$2,4 \times 10^4$ ans
Carbone-14	5 730 ans
Iode-131	8 jours
Radon-222	3,8 jours
Radon-220	56 s
Polonium-213	4×10^{-6} s
Beryllium-8	1×10^{-16} ans

Remarque – On peut se demander comment il est possible de mesurer des demi-vies de l'ordre du milliard d'années. Un calcul d'ordre de grandeur des taux de désintégration escomptés permet de fixer les idées. Considérons un échantillon de 238 g d'uranium-238. Il contient environ $6,02 \times 10^{23}$ noyaux d'uranium. Le taux de désintégration (par émission α) – $dN/dt = \lambda N(t) = N(t) \ln 2 / \tau_{1/2}$ est donc de l'ordre de 500 000 par seconde. En mesurant $\Delta N(t) / \Delta t$, on peut donc avoir accès à $\tau_{1/2}$. Les sources d'incertitude proviennent bien sûr de la détection.

Cette variété de valeurs des demi-vies est une chance, car elle permet d'effectuer des datations pour toutes les échelles de temps nécessaires. Décrivons brièvement la méthode de datation dite « au carbone-14 ».

Datation au carbone-14

Le carbone-14 est produit en haute atmosphère lors de réactions nucléaires induites par des protons rapides d'origine galactique. Lors de ces réactions, des neutrons rapides sont libérés, qui peuvent être capturés par les noyaux d'azote de l'air selon le schéma :



Ce carbone-14 est produit régulièrement. Il est en proportion à peu près constante et connue dans les environnements terrestres où l'on trouve du carbone en contact avec l'atmosphère : gaz carbonique, plantes, corps humain. La proportion est de $1,3 \times 10^{-12}$ noyaux de carbone-14 pour 1 noyau de carbone-12. Lorsqu'un individu ou une plante meurt, son métabolisme cesse et son carbone n'est plus renouvelé. Par conséquent le carbone-14 qu'il contient se désintègre, en redonnant un noyau d'azote-14, et ceci avec une demi-vie de 5 730 ans. Il suffit de mesurer la proportion dans les restes (os, cheveux, bois) pour connaître l'époque de la mort. On peut ainsi dater des événements qui se sont déroulés il y a plus de quelques milliers d'années. Au-delà de 30 000 à 35 000 ans, la plus grande partie des noyaux de carbone-14 ont été désintégrés et le comptage ne peut plus se pratiquer.

Exemple

Dans 1 g de carbone naturel actuel, de masse molaire moyenne 12 g, il y a $6,02 \times 10^{23}/12 \cong 5 \times 10^{22}$ noyaux. Parmi ceux-ci, environ $5 \times 10^{22} \times 1,3 \times 10^{-12} \cong 6,5 \times 10^{10}$ sont des noyaux de carbone-14. Le taux de désintégration $-dN/dt = \lambda N(0)$ est donc de $\ln(2) \times 6,5 \times 10^{10} / (5730 \times 3 \times 10^7) \cong 0,26$ par seconde (il y a en effet environ 3×10^7 secondes dans une année). Au bout de deux fois la demi-vie, soit 11 460 ans, ce taux est réduit d'un facteur $\exp(2\ln 2) = 4$. Le taux de comptage mesuré est beaucoup plus faible : il tient compte de la fenêtre d'entrée du détecteur et de l'efficacité de celui-ci.

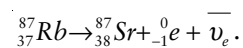
La méthode suppose que le taux de production du carbone-14 en haute atmosphère n'a pas varié entre l'instant initial et le présent. On a pu montrer récemment que ce n'était pas tout à fait le cas, et qu'il fallait effectuer des corrections aux datations obtenues par cette méthode, pour tenir compte des variations des échanges océan-atmosphère d'origine climatique et des variations du champ magnétique terrestre agissant sur le rayonnement cosmique. Le rayonnement cosmique et l'activité solaire ont pu également varier au cours des quelques milliers d'années passées. Depuis la révolution industrielle, l'activité humaine a fortement modifié le taux de carbone-14 présent dans l'atmosphère (combustion d'hydrocarbures d'origine fossile, dépourvus de carbone-14) et les datations doivent bien sûr en tenir compte.

Datation par la méthode rubidium-strontium

Rutherford, il y a un siècle, fut le premier à avoir l'intuition que la radioactivité, présente dans les roches, pouvait servir à déterminer l'âge de celles-ci.

Les roches provenant de l'intérieur de la Terre et métamorphiques (transformées sous l'effet des hautes températures et pressions internes) sont formées de minéraux. Ces minéraux sont composés de constituants majeurs non radioactifs (K, Al, Na, Ca, Si, O, etc.), mais des éléments plus rares susceptibles de présenter des désintégrations radioactives (le rubidium par exemple) peuvent s'insérer dans le réseau cristallin à la place des constituants majeurs (strontium et rubidium à la place du potassium par exemple). Une roche cristallise en une durée très courte à l'échelle géologique, et l'on peut donc considérer que ce processus est instantané.

La méthode rubidium-strontium de datation des roches repose sur la désintégration du rubidium-87 en strontium-87. Un neutron du noyau de rubidium se transforme spontanément en proton (le noyau de rubidium devient ainsi un noyau de strontium), avec éjection d'un électron (conservation de la charge) et d'un anti-neutrino :



On dit qu'il s'agit d'une radioactivité de type β^- . La demi-vie est de 50×10^9 ans, valeur bien adaptée à la datation de roches cristallisées lors de la formation de la Terre.

À partir de la date de cristallisation, date de « fermeture » des minéraux (instant t_0 que l'on prendra comme origine des temps) les éléments radioactifs subissent une évolution indépendante dans chacun des minéraux de la roche. Considérons différents minéraux d'une roche datant de la même époque géologique, contenant du strontium-86 et 87, non radioactifs, et du rubidium-87, radioactif.

À l'instant initial t_0 , le rapport isotopique $N(^{87}\text{Sr})/N(^{86}\text{Sr})_{\text{initial}}$ est le même pour tous les minéraux de la roche, car les deux isotopes ont les mêmes propriétés chimiques. En revanche la quantité de rubidium et le rapport d'abondance $N(^{87}\text{Rb})/N(^{86}\text{Sr})_{\text{initial}}$ varie d'un minéral à l'autre. Ces valeurs initiales sont toutes deux inconnues. Au cours du temps, le nombre d'atomes de strontium-87 augmente en raison de la désintégration des noyaux de rubidium. Comment dater ces roches sans connaître les compositions initiales ?

Soient $N(^{87}\text{Sr})$ et $N(^{86}\text{Sr})$ les nombres d'atomes de strontium-87 et de strontium-86 présents dans un morceau de roche, et $N(^{87}\text{Rb})$ le nombre d'atomes de rubidium-87. Conformément à la loi de désintégration, pour chaque morceau de roche, on aura à l'instant t (en prenant l'instant initial t_0 comme origine des temps) :

$$N(^{87}\text{Rb}) = N(^{87}\text{Rb})_{\text{initial}} \times \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

Le nombre d'atomes de strontium-87 formés est égal au nombre d'atomes de rubidium désintégrés soit :

$$N(^{87}\text{Rb})_{\text{initial}} [1 - \exp(-\lambda t)],$$

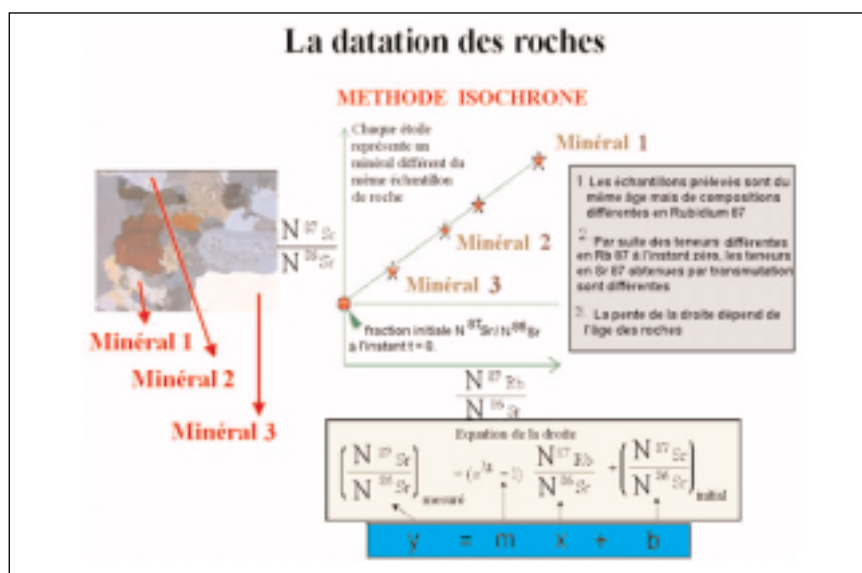


Figure 2

ou encore, en utilisant la relation (1) :

$$N(^{87}\text{Rb}) \times [\exp(\lambda t) - 1].$$

Le nombre total d'atomes de strontium-87, somme des atomes présents initialement et de ceux provenant de la désintégration du rubidium, est donné par :

$$N(^{87}\text{Sr}) = N(^{87}\text{Sr})_{\text{initial}} + N(^{87}\text{Rb}) \times [\exp(\lambda t) - 1]$$

On a donc, en divisant par le nombre d'atomes de strontium-86 présents dans l'échantillon actuellement, la relation :

$$\left(\frac{N(^{87}\text{Sr})}{N(^{86}\text{Sr})} \right)_{\text{mesuré}} = [\exp(\lambda t) - 1] \left(\frac{N(^{87}\text{Rb})}{N(^{86}\text{Sr})} \right)_{\text{mesuré}} + \left(\frac{N(^{87}\text{Sr})}{N(^{86}\text{Sr})} \right)_{\text{initial}} \quad (2)$$

On reporte les valeurs mesurées à l'instant t (actuel) pour les rapports isotopiques dans différents minéraux dans un plan de coordonnées $\{x = N(^{87}\text{Rb})/N(^{86}\text{Sr}), y = N(^{87}\text{Sr})/N(^{86}\text{Sr})\}$. L'équation ci-dessus est celle d'une droite, de pente $\exp(\lambda t) - 1$.

Pour pouvoir tracer la droite, et en déduire l'âge t de la cristallisation de la roche, il est nécessaire d'avoir au moins deux échantillons. Les abondances sont déterminées par spectrométrie de masse. Les points expérimentaux s'alignent sur une droite (voir les étoiles dans la figure 2) dont l'extrapolation à l'origine donne le rapport isotopique $N(^{87}\text{Sr})/N(^{86}\text{Sr})$ à l'instant initial de formation (fermeture) de la roche.

Remarque – La pente de la droite, $\exp(\lambda t) - 1$, augmente au cours du temps. Elle est nulle à $t = 0$. Lorsque le temps s'écoule, la droite pivote autour de l'ordonnée à l'origine. Si l'on choisit les mêmes unités en abscisse et en ordonnée, les points représentatifs des différents échantillons décrivent des segments de droite à 45° , car à chaque fois qu'un noyau de rubidium-87 se désintègre, il apparaît un noyau de strontium-87 (voir figure 3).

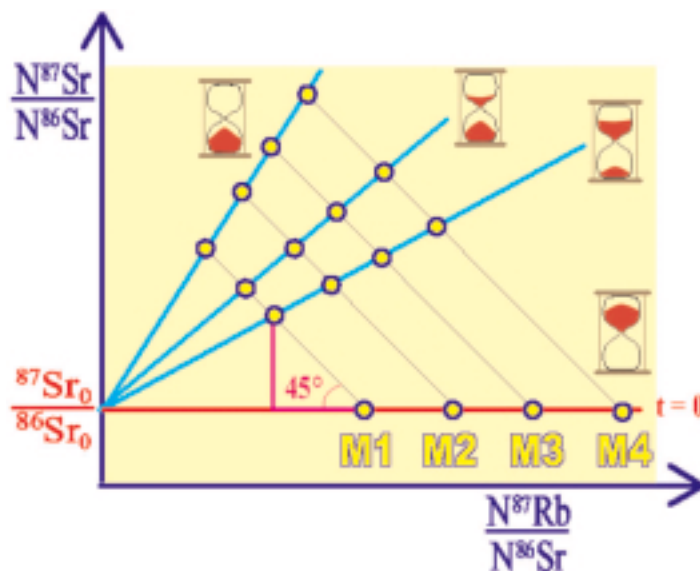


Figure 3

La formule (2), qui permet d'obtenir l'âge du Système solaire, est d'une étonnante simplicité : quelques mesures de rapports isotopiques, le tracer d'une droite, et l'âge en découle. Cette simplicité remarquable est à mettre en regard de la somme de connaissances que la formule représente.

Il existe de nombreux autres couples d'isotopes utilisés pour la radio-chronologie. Sans être exhaustif, on peut citer le potassium-40 (radioactif β^+) qui se désintègre en argon-40 avec une demi-vie de $1,2 \times 10^9$ ans.

L'uranium-238 et l'uranium-235, dont les demi-vies sont respectivement de $4,5 \times 10^9$ et $0,7 \times 10^9$ années, sont chacun à l'origine d'une « famille radioactive » qui se termine pour l'une avec le plomb-206, pour l'autre avec le plomb-207, deux isotopes stables. Celle du thorium-232, dont la demi-vie est de 14×10^9 années, se termine également avec le plomb-208.

À cause de l'altération et de la tectonique des plaques, il n'existe plus aucune roche dont l'origine soit contemporaine de la formation de la Terre et les roches terrestres les plus vieilles datent de 4,1 milliards d'années. Cependant, grâce aux chutes de météorites et aux missions spatiales Apollo, nous disposons d'abondants échantillons planétaires (Lune, Mars, Vesta) qui permettent de dater le Système solaire avec précision. Les âges déterminés à partir de la datation des météorites sont remarquablement cohérents, d'une méthode de datation à l'autre, autour de la valeur de 4,56 milliards d'années.

Existence d'une solution de l'équation $f' = f$ vérifiant $f(0) = 1$

Théorème : L'équation différentielle $f' = f$ admet une solution prenant la valeur 1 en 0.

La démonstration de ce théorème repose, pour x fixé, sur la fabrication de deux suites adjacentes, l'une croissante, $(u_n(x))$, l'autre décroissante, $(v_n(x))$, dont la limite commune définit une fonction vérifiant l'équation différentielle. La suite $(u_n(x))$ apparaît lors de l'application de la méthode d'Euler à $f' = f$.

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ et } v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Les démonstrations qui suivent font appel à la propriété \mathbb{P} suivante :

$$\mathbb{P} : \text{pour tout réel } x > -1 \text{ et tout entier naturel } n, (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Cette propriété \mathbb{P} se démontre soit par récurrence, soit en étudiant la fonction de $(1 + x)^n - nx$ et en montrant que ses valeurs sont toujours supérieures à 1.

On considérera des valeurs de n supérieures à $|x|$.

Pour tout x , la suite $(u_n(x))$ est croissante.

Comme :

$$u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \text{ et } 1 + \frac{x}{n+1} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}, \text{ on obtient en reportant :}$$

$$u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left[1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right]^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left[1 - \frac{x}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right] = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n}\right) = u_n(x)$$

l'inégalité étant obtenue par application de la propriété \mathbb{P} . D'où $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$.

Pour tout x , la suite $(v_n(x))$ est décroissante.

On a : $1/v_n(x) = u_n(-x)$; la suite $(u_n(-x))$ étant croissante à partir d'un certain rang, la suite $(v_n(x))$ est décroissante.

Les suites $u_n(x)$ et $v_n(x)$ sont adjacentes.

En effet, $\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$ (voir la propriété \mathbb{P}), d'où : $1 - \frac{x^2}{n} \leq \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leq 1$.

Donc : $0 < v_n(x) - u_n(x) < [v_n(x)]x^2/n$, et $(u_n(x) - v_n(x))$ tend vers 0.

Les deux suites ont donc même limite.

On note \exp la fonction qui à x fait correspondre la limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$.

On a $\exp(0) = 1$.

Il reste à étudier la dérivée de cette fonction ; pour cela, étudions la limite du rapport $\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0, x étant fixé, et montrons qu'elle est égale à $\exp(x)$.

L'idée est de faire apparaître $\exp(x)$ dans $\exp(x+h)$, et pour cela d'écrire :

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{h}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right]^n$$

On suppose $|h| < 1$ et $n+x > 1$. En utilisant la propriété \mathbb{P} , on a $\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n$,

soit, en passant à la limite : $\exp(x+h) \geq \exp(x)(1+h)$.

On change h en $-h$, puis x en $x+h$. Il vient : $\exp(x+h) \leq \frac{\exp(x)}{1-h}$.

La combinaison des deux inégalités permet d'écrire :

$$- \text{ pour } h > 0 : \exp(x) \leq \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \frac{\exp(x)}{1-h}$$

$$- \text{ pour } h < 0 : \frac{\exp(x)}{1-h} \leq \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \exp(x).$$

d'où le résultat annoncé en passant à la limite pour h tendant vers 0.

Quelques propriétés

Soit φ une fonction vérifiant $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0) = 1$. D'après le paragraphe précédent, il en existe au moins une.

Propriété 1 : La fonction φ ne s'annule pas.

Soit F la fonction définie par $F(x) = \varphi(x)\varphi(-x)$. Sa dérivée est nulle en tout point, car $\varphi' = \varphi$. F est donc constante et vaut toujours 1, qui est la valeur de φ en 0. D'où le résultat.

De plus, $\varphi(-x) = 1/\varphi(x)$.

Propriété 2 : Soient a et λ deux réels. Il existe une solution et une seule de l'équation $f' = \lambda f$ vérifiant la condition initiale $f(0) = a$.

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = a\varphi(\lambda x)$ satisfait les deux propriétés. Supposons qu'il existe une autre fonction g qui les satisfasse également. Formons $F(x) = g(x)\varphi(-\lambda x)$. On vérifie que $F'(x) = 0$, donc F est constante. Comme $F(0) = a$, on a $F(x) = a$. D'où $g(x) = a/\varphi(-\lambda x) = a\varphi(\lambda x) = f(x)$.

En prenant $\lambda = 1$ et $a = 1$, on voit qu'il n'existe qu'une seule fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur 1 en 0. C'est donc la fonction \exp .

Propriété 3 : Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe une constante λ telle que f vérifie $f' = \lambda f$;

ii) pour tous réels a et b : $f(a+b) = f(a)f(b)$.

Montrons que (i) implique (ii).

Soit g définie par $g(x) = f(a+x)$; g vérifie $g' = \lambda g$ et $g(0) = f(a)$.

Soit h définie par $h(x) = f(a)f(x)$; h vérifie $h' = \lambda h$ et $h(0) = f(a)$;

D'après la propriété 2, les deux fonctions g et h sont égales.

Montrons que (ii) implique (i).

On a $f(a+x) = f(a)f(x)$; en dérivant par rapport à x , on trouve $f'(a+x) = f'(a)f'(x)$; en prenant $x = 0$ dans cette dernière égalité, on trouve que, pour tout a , $f'(a) = \lambda f(a)$, soit $f' = \lambda f$, avec $\lambda = f'(0)$.

Corollaire : Pour tout nombre réel x , $\varphi(x) > 0$.

On sait déjà que φ ne s'annule pas. Le résultat découle alors de : $\varphi(x) = \varphi(x/2 + x/2) = \varphi(x/2)^2$

Une notation pour la fonction exponentielle (fonction \exp).

On montre par récurrence en utilisant la propriété 3 ci-dessus que pour tout nombre a et tout entier (positif ou négatif) n :

$$\exp(an) = (\exp(a))^n.$$

On convient de noter e le nombre $\exp(1)$. On peut alors écrire $\exp(n) = e^n$. La fonction exponentielle prolonge à \mathbb{R} la fonction définie sur \mathbb{N} par :

$$n \mapsto \exp(n)$$

et garde la propriété de transformer une somme en produit. On convient d'écrire, pour tout réel x :

$$\exp(x) = e^x.$$

On remarque que, la fonction $x \mapsto e^x$ étant strictement positive, sa dérivée est partout strictement positive, d'où $e > 1$. Une valeur approchée de $e = \lim(1 + 1/n)^n$ est 2,7182818284590452353.