

## De la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles »

Chaque époque a ses mots-clefs, ses mots-fétiches. *Progrès* fut naguère un de ceux-là, magique, mais en ces temps incertains que nous vivons, il a perdu de sa superbe. *Aléatoire*, en revanche, est dans l'air de temps, et pour de bonnes raisons. *Interdisciplinarité* également. C'est de lui qu'il sera question ici.

Je ne vais pas rajouter à la liste, longue, des considérations générales sur le sujet. Les nuances sémantiques distinguant inter-, pluri-, trans-disciplinarité, associées à l'étude de la complexité, ont été l'objet d'analyses de toute sorte. J'utiliserai ici sans précaution particulière le terme « pluridisciplinarité » pour recouvrir d'un seul mot la notion intuitive que chacun en a, et je me placerai dans un cadre restreint, bien défini, celui de l'enseignement des sciences au lycée. Là, les Travaux personnels encadrés (TPE) ont été conçus comme une activité demandant aux élèves de choisir, hors cours traditionnels, des thèmes d'étude qui fassent appel à un double regard (au moins). Je n'aborderai pas cette question ici, l'intérêt des TPE résidant essentiellement dans la mise en place d'une pédagogie de *projet*. Mon propos sera plutôt d'illustrer, dans le cadre du format habituel des cours, et à travers l'exemple du dialogue entre physique et mathématiques, ce que peut être une vision *pluridisciplinaire* de l'enseignement d'une discipline. Je m'appuierai sur le travail commun fait entre les Groupes d'experts des programmes scolaires (GEPS) de physique-chimie et de mathématiques lors de l'élaboration des nouveaux programmes.

Dans l'enseignement, le dialogue entre disciplines, lorsqu'il a lieu, est souvent placé sur le mode du « service » : la physique est discipline de service pour la chimie, la chimie pour la biologie, la biologie pour la psychologie, la psychologie pour la sociologie etc., les mathématiques étant discipline de service pour tout le monde. Chaque domaine est invité à fournir, à partir de l'arsenal conceptuel qu'il constitue au cours de son développement propre, des *outils* pour le domaine voisin. Les rapports entre disciplines sont alors vus comme de simples rapports d'*application*.

L'expérience montre pourtant que cette forme de dialogue est pauvre et peu efficace. En DEUG scientifique, par exemple, la chimie a vite besoin de fonctions thermodynamiques impliquant l'entropie et le second principe. L'enseignant de chimie se tourne vers le physicien et lui demande d'introduire le sujet. Mais le physicien ne peut

satisfaire la demande du chimiste dans l'échelle de temps demandée, car pour lui, il s'agit de construire tout l'édifice de la thermodynamique, c'est-à-dire le passage du microscopique (où les équations sont invariantes par renversement du temps) au macroscopique (où se manifeste la flèche du temps) : cela ne se fait pas en un tournemain. De façon analogue, le physicien a rapidement besoin des équations différentielles et des fonctions de plusieurs variables. Mais construire ces notions dans le champ des mathématiques exige une progression déterminée qui demande du temps. La biologie a tout de suite besoin de coupler un grand nombre de réactions chimiques, alors que le chimiste voudra détailler le mécanisme de l'approche de l'équilibre pour une transformation n'impliquant d'abord qu'une seule réaction. Bref, à chaque fois, l'on se heurte au fait qu'en réalité une discipline s'accommode mal d'être traitée en outil. Elles ont toutes leur logique propre, à laquelle est associée d'ailleurs un certain sens de l'esthétique, et au regard de cette nécessité interne la demande du voisin ne fait pas le poids. Chacun va donc son chemin, et c'est à l'élève, qui reçoit les différents messages, de recoller les morceaux. Que faire pour l'aider ?

Les mathématiques, dans cette logique de l'*application*, posent une question spécifique supplémentaire. Toute discussion sur les rapports entre mathématiques et autres sciences doit affronter la troublante interrogation exprimée par Eugène Wigner dans son recueil « Réflexions et symétries », concernant la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles ». Il s'agit d'un double paradoxe que l'on peut résumer de la façon suivante :

- si les mathématiques sont *inventées* par les mathématiciens – un peu comme la musique est composée par les musiciens – par quel miracle sont-elles si efficaces dans la description de la nature ?
- si elles ne sont pas inventées, c'est qu'elles sont *découvertes* (c'est d'ailleurs souvent ainsi que la plupart des mathématiciens transmettent leur expérience personnelle), et alors se pose la question : où se trouve le monde où ces objets et ces structures mathématiques « vivent » ? où se trouve le nombre 3 ?

Dans cette discussion, Galilée n'est pas loin : les mathématiques seraient le langage de la nature. Mais outre que cette qualification ne répond pas à l'interrogation de Wigner – ce n'est qu'une façon de

la formuler- elle fait silence sur l'une des dimensions des mathématiques, et non des moindres, qui semble détachée du contexte de description de la nature : celle de *démonstration*. Pour ne prendre qu'un exemple : dans la pratique de la mesure, toutes les longueurs sont commensurables, et l'on n'a besoin que des nombres rationnels, voire décimaux, pour traiter des affaires courantes. Pourtant la démonstration arithmétique de l'irrationalité de racine de 2, et plus encore peut-être, sa démonstration géométrique<sup>1</sup>, produit sur l'esprit une émotion d'une force étonnante. Cette force n'a aucun rapport avec l'utilité pratique du résultat, qui est, en un certain sens, mais en un sens seulement, nulle<sup>2</sup>. Cette démonstration, et au delà de celle-ci, toute démonstration mathématique, nous dit-elle quelque chose sur le fonctionnement du cerveau ? Y a-t-il, dans l'intensité de l'émotion ressentie, comme un phénomène de résonance avec des structures mentales profondément enfouies chez l'*homo sapiens-sapiens* ? Je suis évidemment incapable de m'aventurer dans cette direction, dont j'ai pris connaissance par le logicien Jean-Louis Krivine. Ce dernier fournit effectivement une certaine réponse à la question : où se trouve le nombre 3 ? Sa tentative, *non philosophique*, de donner à la vision platonicienne spontanée des mathématiciens une base matérialiste, permet de réconcilier les mathématiques *pour elles-mêmes* et les mathématiques *pour les autres*<sup>3</sup>.

Mais, à la réflexion, il n'est pas nécessaire d'apporter une réponse définitive à l'interrogation de Wigner. L'important, c'est de la maintenir vivace et de l'explicitier, car elle peut constituer un moteur puissant pour éveiller la curiosité des élèves à la fois pour les mathématiques et pour les sciences naturelles. Car ce que nous appelons « comprendre », n'est-ce pas élaborer une représentation abstraite du système que l'on étudie, sous forme de grandeurs physiques et de lois, manipuler selon des règles opératoires bien précises ces symboles, et obtenir un comportement semblable au comportement observé ?

Comprendre permet donc de donner corps à la question de Wigner.

Pour illustrer la démarche, je retracerai à titre d'exemple les contacts que les GEPS de maths, de physique-chimie et de SVT ont eus au printemps 2001, alors que nous élaborions les programmes de terminale S.

Dans les précédents programmes, l'enseignement de la radioactivité faisait partie du programme de première S. Nous avions décidé de le faire passer en terminale S, avec l'idée que les élèves auraient à leur disposition la fonction exponentielle. Nous pourrions ainsi travailler sur la mesure de la radioactivité naturelle du radon, omniprésent dans le sol, et dont la durée de vie de 3,8 jours convenait. Nous prîmes donc contact avec le GEPS de mathématiques, pour savoir quand et comment était introduite la fonction exponentielle. Nous apprîmes alors que le cheminement était le suivant :

1. Recherche d'une fonction qui transforme un produit en somme
2. Construction de la fonction logarithme, comme primitive de  $1/x$
3. Étude de la fonction inverse, nommée exponentielle
4. Établissement de la propriété caractéristique : sa dérivée est égale à elle-même

Cette construction était pour nous une surprise (due à notre méconnaissance de ce qui se passait dans la discipline voisine !) et ne correspondait pas au message que nous voulions transmettre aux élèves. Dans le cadre du thème général du programme de la classe de terminale S, l'évolution temporelle des systèmes, notre intention était d'attirer les élèves sur les nombreux phénomènes qui mettent en jeu *une grandeur y dont le taux de variation instantané est proportionnel à elle-même*. En généralisant à la forme  $y' = ay + b$ , on englobe la décroissance radioactive, la chute d'une bille dans un fluide visqueux, la charge d'un condensateur et l'établissement du courant électrique dans une bobine. D'autres évolutions de ce type se rencontrent en biologie. Nous voulions que les élèves remarquent que la dépendance temporelle de la grandeur considérée, quelle qu'elle soit, faisait intervenir une même fonction. Sa généralité méritait qu'on lui donnât un nom : la fonction exponentielle. L'exponentielle des physiciens apparaissait donc comme solution d'une équation différentielle, alors que l'exponentielle des mathématiciens était la fonction inverse du logarithme ! Ne pouvait-on accorder les approches ? Il fut alors envisagé d'inverser, dans le cours de mathématiques, la présentation des

<sup>1</sup> S'il existe un triangle isocèle rectangle en nombre entier, alors il en existe un autre construit avec des nombres plus petits etc.

<sup>2</sup> La construction des réels est bien sûr nécessaire à celle de l'analyse, qui se construira en relation étroite avec la physique.

<sup>3</sup> On pourra consulter sur le site de J.L. Krivine (<http://www.logique.jussieu.fr/www.krivine>), l'article « Fonctions, programmes et démonstrations » paru dans la Gazette des mathématiciens, n° 60, pages 63-73, avril 1994, et plus encore l'article « Mathématiques des programmes et programme des mathématiques », paru dans la revue Turbulence, n° 1, pages 96-100, octobre 1994, plus facile d'accès.

choses, et de commencer par l'équation différentielle. Du point de vue purement mathématique, les deux présentations sont équivalentes ; elles ne le sont pas du point de vue de la physique. Et de surcroît la présentation classique présentait le désavantage de n'introduire la fonction exponentielle qu'en fin d'année. Mais en réalité, ce qui auto-convainquit le GEPS de mathématique de procéder ainsi, ce fut un élément supplémentaire auquel nous n'avions pas pensé, et qui força l'adhésion de tous : ce fut la possibilité de constituer un morceau d'interdisciplinarité exemplaire et consistant. Ce morceau s'étoffait de l'introduction, à propos du caractère aléatoire de la désintégration d'un noyau, des probabilités à densité continue. Le sujet mérite qu'on s'y arrête un instant.

Lorsque, dans le cours de physique, on observe la désintégration d'une population de noyaux, la loi macroscopique moyenne en  $N_0 \exp(-\lambda t)$  est ornée de fluctuations. Le professeur de physique annonce : il s'agit d'un phénomène aléatoire. Mais la phrase est vague. Dans le cours de mathématiques, l'élève rencontre aussi le mot « aléatoire », associée à « variable aléatoire ». Est-ce le même mot ? Pour le savoir, il faut aller vers le microscopique et élaborer un modèle *physique* de la désintégration du noyau. La première étape consiste à postuler que la durée de vie d'un noyau est une variable aléatoire à densité. Le modèle physique contient alors les trois propositions suivantes :

1. Tous les noyaux d'une même espèce ont les mêmes propriétés.
2. Dans les conditions usuelles d'observation, la désintégration d'un noyau n'influence pas le noyau voisin.
3. La désintégration d'un noyau est un processus de « mort sans vieillissement ».

Il est important, à ce stade, de remarquer que ce modèle est relatif à un phénomène *qui n'est pas observé* : on n'observe en effet que le comportement d'une collection macroscopique de noyaux. Comment peut-on alors se convaincre que le modèle physique est correct ? En *traduisant* ces propositions en un *modèle mathématique*, et en montrant que ce modèle conduit, pour un ensemble de noyaux, à la loi de décroissance macroscopique observée<sup>4</sup>. *Il n'y a pas d'autres façons de valider les hypothèses physiques !* Au passage, on montre, et il s'agit là d'un autre enjeu de taille pour des élèves de terminale, qu'un phénomène aléatoire à l'échelle microscopique peut conduire à un comportement macroscopique

parfaitement prévisible, au point que les sciences de la Terre utilisent la désintégration radioactive de certains éléments comme une horloge permettant, par exemple, de déterminer l'âge du système solaire...

Les discussions entre physiciens et mathématiciens, au cours de ce travail qui a mis plusieurs mois à converger, ne se sont pas toujours déroulées dans la sphère de la froide rationalité. Elles ont revêtu parfois des aspects psychologiques surprenant mais révélateurs. Le plus net est peut-être celui qui a accompagné la proposition d'introduire l'exponentielle à partir de l'équation différentielle caractéristique. La préoccupation première des mathématiciens a été de se demander comment on allait montrer aux élèves que l'équation  $y' = y$  définit bien une fonction. C'est en effet la première fois qu'ils rencontrent une équation de ce type, où l'inconnue n'est pas une valeur mais une fonction. La réaction spontanée des physiciens a été une incompréhension initiale totale : mais que vont-ils chercher là, où est le problème ?

Cette réaction, à mon sens, a deux origines. D'une part, nous autres physiciens oublions parfois que les mathématiciens travaillent à nous garantir que les concepts que nous utilisons ne sont pas piégés. Il est bon de s'en souvenir. Mais il existe une autre raison, plus profonde. Lorsque le physicien modélise une situation physique et obtient chemin faisant une équation différentielle, il est bien convaincu que celle-ci a des solutions, tout simplement parce que le phénomène se déroule ! Autrement dit, il faut bien que l'équation  $dN/dt = -\lambda N$  ait une solution, puisque le noyau se désintègre. Il n'a pas tort : lorsqu'il est sûr de son modèle, le physicien tend à confondre la réalité et sa représentation. C'est condamnable du point de vue épistémologique, mais c'est ainsi que l'on se constitue son catalogue d'images mentales. Si l'équation ne définissait pas une fonction, cela signifierait ou bien que le modèle n'est pas le bon, ou qu'il y a quelque chose qui ne va pas dans la définition de la dérivée. C'est précisément ce à quoi travaille le mathématicien. Mais il est intéressant, *pour les mathématiques*, que le mathématicien soit aussi sensible à ce qui emporte la conviction du physicien, autrement dit qu'il soit sensible à l'interrogation de Wigner.

Au fond, les angoisses des uns et des autres sont de nature différente : le physicien veut comprendre « comment ça marche », le mathématicien veut être sûr que les objets qu'il manipule ont une existence légitime. Chacun gagne à comprendre l'angoisse de l'autre. C'est pourquoi le document qui a été finalement rédigé sur la radioactivité est

<sup>4</sup> Les choses sont faites en détail dans un texte reproduit à l'identique dans le document d'accompagnement de mathématiques et dans celui de physique, classe terminale S.

le même pour les enseignants de mathématiques et les enseignants de physique<sup>5</sup>.

L'entrelacs des interrogations que physique et mathématiques peuvent se poser au sujet de la radioactivité montre sur un exemple précis que le rapport des deux disciplines est bien plus profond qu'un simple rapport d'outil : où s'arrête la physique, où commencent les mathématiques, si la validation d'un modèle physique requiert la mise en route d'un modèle mathématique, et si des notions mathématiques semblent surgir de l'observation scientifique de la nature ? Ne pourrait-on s'interroger sur une « déraisonnable efficacité de la physique pour le développement des mathématiques » ? Le dialogue entre disciplines change de nature, s'il s'articule autour d'*objets de connaissance* qui établissent sa nécessité et en fixent des limites naturelles. Il est évidemment hors de question que l'ensemble de l'enseignement se déroule de cette façon. Les disciplines ont leur logique interne qu'il faut respecter. Mais des exemples bien choisis, minutieusement élaborés peuvent (doivent ?) aider à constituer une vision interdisciplinaire de sa propre discipline.

Jacques Treiner,  
Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie,  
Paris

---

<sup>5</sup> On y montre de façon rigoureuse que l'équation  $y' = y$  définit bien une fonction !